TUGAS KELOMPOK

“TURUNAN DAN INTEGRAL”

DISUSUN OLEH

NAMA	**1. LUKMANUDIN**	**D07090135**
	2. YUYU YUMIARSIH	**D07090191**
	3. SERLI WIJAYA	**D07090138**
PROGRAM STUDY	**: PEND. MATEMATIKA**	
MATA KULIAH	**: ANALISA VEKTOR**	
DOSEN	**: ABDUL KARIM, M.Pd**	

FALKUTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN (FKIP)

UNIVERSITAS MATHLA’UL ANWAR BANTEN

2012

BAB 1 TURUNAN

1.1 Definisi Turunan Fungsi.

pada bab limit, kita telah mempelajari limit fungsi yang mengarah pada konsep turunan, yaitu :

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pada bentuk limit diatas merupakan turunan pertama dari y = f(x) dan di tulis sebagai f'(x). berarti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1.2 Notasi Turunan.

Diberikan y = f(x), maka notasi turunannya adalah:

$$\boldsymbol{y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)}$$

Semuanya menyatakan notasi turunan dari *f* terhadap x. Notasi ,$\frac{dy}{dx}$ (dibaca "de y de x"), dan $\frac{d(f(x))}{dx}$ = (dibaca de *f(x)* de x)

Contoh 1.1

Andaikan f(x) = 14x + 6. Tentukan *f '(x).*

Jawab.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{14(x+h) + 6 - [14(x) + 6]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{14h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 14$$

$$f'(x) = 14$$

1.3 Turunan Fungsi

a. Turunan identitas

Jika *f(x)* = x, maka turunan *f(x)* terhadap *x* adalah :

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Contoh : 1.2

Jika *f(x)* = x maka *f ‘(x)* = 1

b. Turunan Fungsi Konstan.

Jika c adalah suatu konstan, maka turunan f(x) = c , $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(c - c)}{h}$$

$$f'(x) = 0$$

c. Turunan Fungsi Bentuk Pangkat.

Penentuan turunan fungsi pangkat, f(x) = x^n Dapat diuraikan berdasarkan perhitungan limit berikut ini

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Binomial newton:

$$(x+h)^n = C_0^n X^n + C_1^n X^{n-1} h + C_2^n X^{n-2} h^2 + \ldots.. + C_n^n h^n$$

Turunan fungsi pangkat.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{C_0^n X^n + C_1^n X^{n-1} h + \ldots.. + C_n^n h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + C_1^n X^{n-1}h + \ldots.. + C_n^n h^n - x^n\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(C_1^n X^{n-1} + C_2^n x^{n-2}h + \ldots.. + C_n^n h^{n-1}\right)}{h}$$

$$f'(x) = C_1^n x^{n-1} \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Turunan fungsi bentuk pangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan – bilangan bulat positif dan maka $f'(x) = nx^{n-1}$

$$\boldsymbol{\frac{df}{dx} = nx^{n-1}}$$

Contoh 1.3

Tentukan turunan dari fungsi – fungsi berikut

a. $F(x) = x^3$
b. $F(x) = x^4$

Jawab

a. $f'(x) = 3x^2$
b. $f'(x) = 4x^3$

d. Turunan Perkalian Konstan Dengan Fungsi.

Jika *g(x) = kf(x)* dengan *f(x)* suatu fungsi yang dideferensialkn, dan k suatu konstan, *g' (x) = kf'(x)*, yaitu :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x) = kf'(x)}$$

Bukti

Andaikan g(x) = *kf*(x),maka

g'(x) = $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k.f(x+h)-k.f(x)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} k\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$= kf(x)$ **terbukti**

Contoh 1.4

Tentukan turunan g(x) = $3x^5$

Jawab

g'(x) = $3.5x^{5-1} = 15x^4$

e. Turunan Dari Jumlah / Selisih Dua Fungsi.

1. Jika f(x) dan g (x) fungsi – fungsi yang terdiferensialkan, dan h(x)= f(x) + g(x) maka:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)}$$

Jika f(x) dan g (x) fungsi – fungsi yang terdiferensialkan, dan h(x)= f(x) - g(x) maka:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)}$$

Contoh 1.5

Jika f (x) = $2x^3 + 3\sqrt[3]{x}$, maka tentukan f '(x)!

Jawab

$$f(x) = 2x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = 2.3x^2 + 3\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

= $6x^2 + x^{-2/3}$

$f'(x) = 6x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

f. Turunan Hasil Kali.

Misalkan *f(x)* dan g*(x)* adalah fungsi – fungsi yang dapat di diferensialkan dan h(x) = f(x).g(x) maka :

$$\boldsymbol{h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)}$$

bukti

Contoh 1.6

Carilah turunan dari f(x) = $(x^3 + 2x)(x^2 - 3)$!

Jawab

Misalkan g(x) = $(x^3 + 2x)$ dan h(x) = $(x^2 - 3)$ maka

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$
$$= (x^3 + 2x)(2x) + (x^2 - 3)(3x^2 + 2)$$
$$= (2x^4 + 4x^2 + 3x^4 + 2x^2 - 9x^2 - 6)$$
$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 6$$

g. Turunan hasil bagi.

Jika f(x) dan g(x) terdiferensialkan dan $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,g(x) ≠ 0 maka :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Contoh 1.7

Carilah turunan dari $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 3}$

Jawab

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x) - (x^2+1)(2)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{(4x^2 - 4x - 2x^2 - 2)}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 2}{(2x-3)^2}$$

h. Turunan Sinus Dan Kosinus.

Jika f(x) = sin x dan g(x) = cos x, keduanya terdiperensialkan, maka f'(x) = cos x dan g'(x) = - sin x

1. $\frac{d}{dx}(sinx) = cos\ x$
2. $\frac{d}{dx}(cosx) = -sin\ x$
3. $\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2\ x$
4. $\frac{d}{dx}(cotx) = -csc^2\ x$
5. $\frac{d}{dx}(secx) = sec\ x\ tan\ x$
6. $\frac{d}{dx}(secx) = -csc\ x\ cot\ x$

Contoh 1.8

Tentukan turunan f(x) = sin x – cos x

Jawab

f ’(x) = cos x – (- sin x)

f ’(x) = cos x + sin x

i. Turunan Aturan Rantai.

Misalnya y = f(u) dan u = g(x) menentukan komposit $y = f\left(g(x)\right) = (f\ o\ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiperensialkan di u = g(x), maka $f\ o\ g$ terdiferensialkan di x dan

$$(\boldsymbol{f\ o\ g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \quad atau \quad \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}}.\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

contoh 1.9

tentukan turunan dari y = $(x^2 – 3x + 1)^{10}$

Jawab

Misalnya u = $x^2 – 3x + 1$, maka y = u^{10} akibatnya, $\frac{du}{dx}$ = 2x – 3 dan $\frac{dy}{dx}$ = $10u^9$ = $10(x^2 – 3x + 1)$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

= $10\ u^9.\ 2x – 3$

= $10(x^2 – 3x + 1).(2x – 3)$

Uji Kompetensi 1

Tentukan turunan dari fungsi – fungsi berikut ini

1. f(x) = 4sinxcosx . . . .
2. f(x) = $11x^4 – 3x + 9$
3. f(x) = $\sqrt{x}$ . . . .
4. g(x) = $\frac{2}{\sqrt{x}}$ . . . .
5. h(x) = $x^7 + x^5 – 5x + 7$ . . . .
6. g(t) = $\sqrt[3]{t} - 3t$ . . . .
7. jika f(x)= $x^3 + 6x^2 + 2x + 5$, maka f'(x) – 2 . . . .
8. f(x) = $\frac{5}{3x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{x^3}{9}$ . . . .
9. f(x) = $(3x^2 – 5)(2x + 4)$ . . . .
10. jika y = $3u^2 – 2u + 5$ dan u = $x^2 – 6$,tentukan dy/dx. . . .
11. carilah f ' (x) dari 3cos x – 2sin x . . .
12. y = $\frac{0,25}{\sqrt[5]{x^2}}$ . . .
13. y = $\sin(x^2 – 1)$
14. jika y = $\sin^3 x$ tentkan y'!
15. Turunan tan x = $\sec^2 x$ . .

BAB 2 INTEGRAL

1.1. Pengertian Integral.

Misalkan diketahui :

$$f(x) = 3x^2 + 4x$$

Maka turunanya adalah

$$f'(x) = 6x + 4$$

Perhatikan dibawah ini :

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 6x + 4$$
$$f(x) = 3x^2 + 4x - 5 \Longrightarrow f'(x) = 6x + 4$$
$$f(x) = 3x^2 + 4x + 7 \Longrightarrow f'(x) = 6x + 4$$
$$f(x) = 3x^2 + 4x + 9 \Longrightarrow f'(x) = 6x + 4$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$f(x) = 3x^2 + 4x + c \Longrightarrow f'(x) = 6x + 4$$

Proses pengerjaan dari f(x) ke f'(x) merupakan ***operasi pendeferensialkan*** yang udah dijelaskan bab 1, sedangkan proses pengerjaan dari f'(x) ke f(x) merupakan operasi kebalikan dari pendiferensialan, atau dinamakan *anti diferensialaan* atau dikenal dengan ***pengitegralan.***

Perhatikan bahwa masing – msaing fungsi f(x) diatas yang berbeda hanya suku tetap saja, sedangkan suku lainya slalu sama yaitu $3x^2$ dan 4x. ini berarti bahwa semua fungsi hasil pengintegralan f'(x) = 6x + 4 dapat dituliskan sebagai f(x) = $3x^2$ + 4x + c, dengan C adalah konstan dan C ϵ **R**

1.2. Notasi integral.

Jika *f* suatu turunan dari *F,* maka notasinya adalah *F'*(x) = *f(x)* atau dapat juga di tuliskan sebagai d(F(x))= *f*(x)dx. Sebaliknya F adalah anti turunan dari *f* dan notasi atau symbol untuk operasi pengintegralan adalah $\int$. Kita tuliskan :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Dengan :

F(x) = adalah fungsi integral umum yang bersifatnya F'(x) = *f*(x),

f(x) disebut fungsi integral,

C adalah konstan real sembarang.

Pengintegralan fungsi *f* terhadap x seperti tertulis diatas dinamakan **integral tak tentu** dari fungsi *f* terhadap x

Contoh 2.1 $\int (6x+2)\,dx = 3x^2 + 2x + c$

1.3. Interal Tak Tentu Dari Fungsi Aljabar.

Telah disebutkan di atas bahwa untuk menentukan integral tak tentu dari aturan turunan digunakan $\int f(x)dx = F(x) + C$

Ini berarti bahwa untuk menentukan hasil suatu integral tak tentu $\int f(x)dx$ adalah mencari fungsi F(x).

RUMUS DASAR INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR.

Perhatikan ilustrasi berikut ini :

Jika F(x) = $\frac{1}{2}x^2$ maka F'(x) = f(x) = x

Berarti $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

Jika $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ maka F'(x) = f(x) = x^2

Berarti $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

Dari ilustrasi diatas kita dapatkan pola keteraturanya, sehingga kita dapat disimpulkan rumus umum integral tak tentu aljabar adalah :

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Berlaku untuk semua n bilangan real kecuali n ≠ 1

Misalkan *k* konstan real sembarang, *f*(x) dan *g*(x) masing – masing merupakan fungsi integral yang dapat ditentukan fungsi integral umunya, maka :

a. $\int dx = x + C$

b. $\int kdx = kx + C$

c. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, dengan n bilangan rasional, n ≠ 1

d. $\int kx^n dx = \frac{k}{n+1}x^{n+1} + C$, dengan n bilangan rasional, n ≠ 1

e. $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx = k(F(x) + C)$

f. $\int dx = x + C$

g. $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)d\,x = F(x) + G(x) + C$

h. $\int \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)d\,x = F(x) - G(x) + C$

Contoh 2.2

Tentukan anti turunan

1. x^5

2. $\frac{1}{x^3}$
3. $\sqrt[3]{x^4}$
4. $\int (3x^7 - 4x^5 + 5x^3 - 6x)dx$

Jawab

1. $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C$

   $= \frac{1}{6} x^6 + c$

2. $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c \Rightarrow -\frac{1}{2x^2} + c$

3. $\int \sqrt[3]{x^4} dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{\frac{4}{3}+1} x^{\frac{4}{3}+1} + c = \frac{1}{\frac{7}{3}} x^{\frac{7}{3}} + c \Rightarrow \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + c \Rightarrow \frac{7}{3} \sqrt[3]{x^7} + c$

4. $\int (3x^7 - 4x^5 + 5x^3 - 6)dx = \frac{3}{8} x^8 - \frac{2}{3} x^6 + \frac{5}{4} x^4 - 3x^2 + c$

1.4. Integral Tentu.

a. Mengenal Pengertian Integral Tentu.

Rumus $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Disebut integral tentu, sebab hasil integral tersebut bernilai tertentu. Pada rumus diatas, a disebut batas bawah dan b disebut batas atas integrasi. Interval [a,b] disebut interval integrasi.

b. Menentukan Nilai Suatu Integral Tentu.

Contoh 2.3

a. Carilah $\int_1^3 (x^2 - x)dx$

Penyelesaian

$$\int_1^3 (x^2 - x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2\right]$$

$$= \left[9 - 4\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= 4\frac{2}{3}$$

b. Hitunglah $\int_{-1}^{2} (3x-2)^2\, dx$

Penyelesaian

$$\int_{-1}^{2} (3x-2)^2\, dx = \int_{-1}^{2} (9x^2 - 12x + 4) dx$$

$$= \left[\frac{9}{3} x^3 - \frac{12}{2} x^2 + 4 \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[3x^3 - 6x^2 + 4\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[3(2)^3 - 6(2)^2 + 4\right] - \left[3(-1)^3 - 6(-1)^2 + 4\right]$$

$$= [24 - 24 + 4] - [-3 - 6 + 4]$$

$$= 21$$

c. Menentukan sifat – sifat integral tentu.

Sifat – sifat integral tertentu adalah sebagai berikut :

I. $$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

bukti

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

$$= F(c) - F(a)$$

$$= \int_a^c F(x) dx \qquad (terbukti)$$

II. $$\int_a^b kf(x) dx = k\int_a^b f(x) dx$$ **; k bilangan konstan**

Bukti

$$\int_a^b kf(x) dx = [kf(x)]_a^b$$

$$= kF(b) - kF(a)$$

$$= k[F(b) - F(a)]$$

$$= k\int_a^b F(x) dx$$ **(terbukti)**

III. $$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Bukti

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx=[F(x)+g(x)]_a^b$$

$$=[F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$
$$=[F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad \textbf{terbukti}$$

IV. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

Bukti

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$=-[F(a)-F(b)]$$

$$=-\int_b^a F(x)dx \quad \textbf{terbukti}$$

Contoh 2.4

Hitunglah $\int_1^2 (4x^3-6x^2)dx+\int_2^3 (4x^3-6x^2)dx$

Penyelesaian

$$\int_1^2 (4x^3-6x^2)dx+\int_2^3 (4x^3-6x^2)dx=\int_1^3 (4x^3-6x^2)dx$$

$$= \left[\frac{4}{4}x^4-\frac{6}{3}x^3\right]_1^3$$

$$= \left[x^4-2x^3\right]_1^3$$

$= [(3)^4 - 2(3)^3] - [(1)^4 - 2(1)^3]$

$= (81 - 54) - (1 - 2)$

$= 28$

1.5. Integral Tak Tentu Dari Fungsi Trigonometri.

Sebagiman rumus dasar integral tak tentu dari fungsi aljabar, rumus – rumus dasar untuk fungsi trigonometri pun kita rancang dari aturan rumus turunan untuk trigonometri. Untuk itu, diingat kembali aturan turunan untuk fungsi trigonometri berikut :

F(x) = sin x ⟹ F'(x) = cos x

F(x) = cos x ⟹ F'(x) = - sin x

F(x) = tan x ⟹ F'(x) = sec ^{2} x

F(x) = cot x ⟹ F'(x) = - cosec x

F(x) = cot x ⟹ F'(x) = tan x sec x

F(x) = cot x ⟹ F'(x) = - cot x cos x

Dengan menggunakan aturan integral tak tentu $\int f(x)dx = F(x) + C$ yang bersifat F'(x) = f(x), maka kita peroleh rumus – rumus dasar integral tak tentu untuk fungsi trigonometri sebagai berikut

1. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
3. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
4. $\int \mathrm{cosec}^2 \, x \, dx = -\cot x + c$
5. $\int \tan x sec x \, dx = \sec x + c$
6. $\int \cot x cosec x \, dx = -cos \, \mathrm{ec} \, x + c$

Sekarang perhatikan turunan dari fungsi –fungsi trigonometri dengan sudut berbentuk (ax + b):

F(x) = sin (ax + b) ⟹ F'(x) = acos (ax + b)
F(x) = cos (ax + b) ⟹ F'(x) = - asin (ax + b)
F(x) = tan (ax + b) ⟹ F'(x) = asec^2 (ax + b)
F(x) = cot (ax + b) ⟹ F'(x) = - asec^2 (ax + b)
F(x) = sec (ax + b) ⟹ F'(x) = a tan(ax + a).sec (ax + b)
F(x) = cosec (ax + b) ⟹ F'(x) = - a cot (ax + b).cosec (ax + b)

Dengan demikian, kita dapat merumuskan aturan integral tak tentu dari fungsi trigonometri yang sudutnya berbentuk (ax +b) sebagai berikut :

1. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

2. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b)+c$

3. $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}tan(ax+b)+c$

4. $\int \text{cosec}^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cot(ax+b)+c$

5. $\int \tan(ax+b).\sec(ax+b)dx = \frac{1}{a}sec(ax+b)+c$

6. $\int \cot(ax+b)cosec(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cosec(ax+b)+c$

Contoh 2.5

Tentukan integral tak tentu

a. $\int (5x+\cos x)dx$

b. $\int (2\cos x - 3\sin x)dx$

Penyelesaian

a. $\int (5x+\cos x)dx = \int 5x dx + \int \cos x dx$

$= 5.\frac{1}{2}x^2 + \sin x + c$

b. $\int (2\cos x - 3\sin x)dx = \int 2\cos x dx - \int 3\sin x dx$

$= 2\sin x + 3\cos x + c$

Contoh 2.6

Tentukan integral dari

a. $\int \cos(2x-\pi)dx$

b. $\int 5\tan(3x).\sec(3x)dx$

Penyelesian

a. $\int \cos(2x-\pi)dx = \frac{1}{2}\sin(2x-\pi)+c$

b. $\int 5\tan(3x).\sec(3x)dx = 5\int \tan(3x)\sec(3x)dx = \frac{5}{3}\sec 3x + c$

Contoh 2.7

Hitung integral tertentu dari $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin 3x dx$

Penyelesaian

$$\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin 3x dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x \right]_0^{\frac{1}{6}\pi}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}\pi \right] - \left[-\frac{1}{3}\cos 0 \right]$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

1.6. Pengintegralan Dengan Subtitusi.

Ada pengintegralan fungsi – fungsi yang dapat disederhanakan menjadi bentuk $\int (f(x))^n d(f(x))$ *atau dengan memisalkan* u = f(x) *menjadi bentuk*

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$$

Contoh 2.8

Carilah $\int \sin x \cos^5 x dx$

Penyelesaian

Misal u = cos x dan du/dx = - sin x maka du = - sin x dx

$$\int \sin x \cos^5 x dx = -\int u^5$$

$$= -\frac{1}{6}u^6 + c \qquad \Rightarrow = -\frac{1}{6}\cos^6 x + c$$

1.7. pengintegral Dengan Parsial

Anda akan sering menjumpai suatu integral yang dapat di pecahkan dengan metode integral parsial. Dalam hitungan differensial telah diketahui bahwa :

$d(uv) = udv + vdu \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu$

Maka dengan pengintegralan dengan kedua ruas didapat bentuk integral parsial :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Contoh 2.9

Tentukan $\int 2x \sin x dx$

Penyelesaian

Misal u = 2x dan du = 2 dx

dv = sin x dx maka v = $\int \sin x dx = -\cos x$

$\int x \cos 2x dx = uv - \int vdu$

= $(2x)(-\cos x) - \int (-\cos x) 2dx$

= - 2x cos x + 2sin x + c

Jadi $\int 2x \sin x dx$ = - 2x cos x + 2sin x + c

Kompetensi 2

Tentukan integral berikut ini

1. $\int \frac{1}{10} dx$
2. $\int 6\sqrt{x}dx$
3. $\int \left(-6x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3} \right) dx$
4. Tentukan f(x) bila f '(x) = $3x^2$ – 4x + 5 dan f(1) = 6
5. $\int_2^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right) dx$
6. Hitunglah $\int_1^4 \left(2x - 5x\sqrt{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx$
7. Carilah $\int_0^{\pi} 3\sin x dx$
8. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x \cos 2x dx$
9. Selesaikan $\int \left(x^2 + 2x + 3\right)^6 (2x + 2) dx$
10. Tentukan $\int_2^4 \left(4x^2 - x\right) dx$
11. Hitunglah $\int_0^1 2x^2 dx$
12. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) dx$
13. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$
14. Hitunglah $\int \frac{dx}{x^3}$
15. hitunglah $\int \sqrt[3]{z} dz$

Jawaban
Kompetensi 1

1. f(x) = 4sinxcosx . . . .
   f(x) = 4sinx cos x $\Longrightarrow$ f'(x) = - 4sinx sinx + 4cos x.cos x
   = - 4sin^{2}x + 4cos^{2}x

2. f(x) = 11x^4 – 3x + 9
   f'(x) = 44x^3 – 3

3. f(x) = $\sqrt{x}$ . . . .
   f'(x) = $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. g(x) = $\frac{2}{\sqrt{x}}$ . . . .
   g(x) = $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -x^{\frac{1}{2}}$
   $\Rightarrow g'(x) = -\sqrt{x}$

5. h(x) = x^7 + x^5 – 5x + 7 . . . .
   h'(x) = 7x^6 + 5x^4 – 5

6. g(t) = $\sqrt[3]{t} - 3t$ . . . .
   g(t) = $t^{\frac{1}{3}} - 3t \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} - 3$
   $\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 3$

7. jika f(x)= x^3 + 6x^2 + 2x + 5, maka f'(x) – 2 . . . .
   f'(x) = 3x^2 + 12x + 2
   f'(x) – 2 = 3x^2 + 12x + 2 – 2
   f'(x) – 2 = 3x^2 + 12x

8. f(x) = $\frac{5}{3x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{x^3}{9}$ . . . .
   $$f(x) = \frac{5}{3}x^{-2} - 2x^{-4} + \frac{x^3}{9}$$
   $$f'(x) = -\frac{10}{3}x^{-3} + 8x^{-5} + \frac{1}{3}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{10}{3x^3} + \frac{8}{x^5} + \frac{1}{3}x^2$$

9. f(x) = ($3x^2$ – 5)(2x + 4) . . . .
   misalkan g(x) = ($3x^2$ – 5) dan h(x) = (2x + 4), maka
   f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)
   = ($3x^2$ – 5)(2) + (2x + 4)(6x)
   = ($6x^2$ – 10) + ($12x^2$ + 24x)
   = $18x^2$ + 24x – 10

10. jika y = $3u^2$ – 2u + 5 dan u = x^2 – 6 ,tentukan dy/dx. . . .
    menurut aturan rantai , untuk *y = f(x)* dan u = g(x), berlaku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left(3u^2 - 2u - 5\right)\frac{d}{dx}\left(x^2 - 6\right) = (6u - 2)(2x)$$

Dengan mensubtitusikan u = x^2 – 6, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \left[6\left(x^2 - 6\right) - 2\right](2x)$$

$$= \left(6x^2 - 38\right)(2x)$$

$$= 12x^3 - 76x$$

11. carilah f ' (x) dari 3cos x – 2sin x . . .
    f'(x) = - 3sin x – 2 cos x
12. y = $\frac{0,25}{\sqrt[5]{x^2}}$ . . .
    anda ubah dahulu y bentuk ax^n agar dapat menggunakan aturan hasil kali konstan dengan fungsi

$$y = \frac{0,25}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{0,25}{x^{\frac{2}{5}}} = 0,25x^{\frac{2}{5}}$$

Dari bentuk tersebut, anda dapat menggunakan aturan hasil kali kon-stan dengan fungsi.

$$y' = 0,25\left[-\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}\right] = -0,1x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{0,1}{\sqrt[5]{x^7}}$$

13. y = sin(x^2 – 1)
    jika y = sin u dan u = x^2 – 1
    maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = (\cos u)(2x) = 2x\cos\left(x^2 - 1\right)$

14. jika y = $\sin^3 x$ tentkan y'!
    penyelesaian

jika y = u^3 dan u = sin x

maka $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\left(3u^2\right)(\cos x)=3\sin^2\cos x$

15. Turunan tan x = $\sec^2$x . .

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{\cos x.D(\sin x)-\sin xD(\cos x)}{(\cos x)^2} \qquad =\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad =\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$ **terbukti**

Jawaban kompetensi 2

1. $\int\frac{1}{x^{10}}dx=\int x^{-10}dx=\frac{1}{-10+1}x^{-10+1}+c$

$$=-\frac{1}{9}x^{-9}+c\Rightarrow-\frac{1}{9x^9}+c$$

2. $\int 6\sqrt{x}dx=6\int x^{\frac{1}{2}}dx=6\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+c\right)$

$$=6\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c\right)\Rightarrow 4x^{\frac{3}{2}}+c\Rightarrow 4x\sqrt{x}+c$$

3. $\int\left(-6x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x^3}\right)dx=\int-6x^2dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{4}{x^3}dx$

$$=-\frac{6}{3}x^3+\int 2x^{-\frac{1}{2}}dx-\int 4x^{-3}dx$$

$$=-2x^3+4x^{\frac{1}{2}}-\left(-2x^{-2}\right)+c$$

$$=-2x^3+4\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}+c$$

4. Tentukan f(x) bila f ‘(x) = $3x^2$ – 4x + 5 dan f(1) = 6

$$\int f'(x)dx=\int\left(3x^2-4x+5\right)dx$$

$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

$$f(1)=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c$$

$$6=4+c\Rightarrow C=2$$

Jadi **f(x) = x^3 – 2x^2 + 5x + 2**

5. $\int_2^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = [x^4 - x^3 + x^2 + x]_2^2$

= (2^4 – 2^3 + 2^2 + 2) – (2^4 – 2^3 + 2^2 + 2)

= 0

6. $\int_1^4 \left(2x - 5x\sqrt{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = \int_1^4 2xdx - \int_1^4 5x\sqrt{x}dx + \int_1^4 \frac{4}{x^2}dx$

= $\left[\frac{2}{2}x^2\right]_1^4 - \left[\frac{5}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{4}{-1}x^{-1}\right]_1^4$

= $[x^2]_1^4 - [2x^2\sqrt{x}]_1^4 - \left[\frac{4}{x}\right]_1^4$

= $(4^2 - 1^2) - (2.4^2\sqrt{4} - 2.1^2\sqrt{1}) - \left(\frac{4}{4} - \frac{4}{1}\right)$

= 15 – 62 + 3 $\Rightarrow$ - 44

7. $\int_0^\pi 3\sin xdx = [-3\cos x]_0^\pi = (3\cos(\pi) - 3\cos 0) = 3 + 3 = 6$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x\cos 2xdx$

Misal u = sin 2x maka du = 2cos 2x dx

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} u^3du = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}u^4\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\left[\frac{\sin^4 2x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

9. $\int (x^2 + 2x + 3)^6(2x + 2)dx$

Misal u = x^2 + 2x + 3 maka du = 2x + 2dx

$\int (x^2 + 2x + 3)^6(2x + 2)dx = \int u^6du \Rightarrow \frac{1}{6+1}u^{6+1} + c$

$$= \frac{1}{7}u^7 + c \Rightarrow \frac{1}{7}\left(x^2 + 2x + 3\right)^6 + c$$

10. $\int_2^4 \left(4x^2 - x\right)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_2^4 = \left[\frac{4}{3}(4)^3 - \frac{1}{2}(4)^2\right] - \left[\frac{4}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2\right]$

$$\left(\frac{256}{3} - 8\right) - \left(\frac{32}{3} - 2\right) \Rightarrow \frac{206}{3}$$

11. $\int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}(1)^3 - 0\right) = \frac{2}{3}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}0^2 + \sin 0\right]$

$$= \frac{\pi^2}{8} + 1 + 0 \Rightarrow 1 + \frac{\pi^2}{8}$$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx$ solusi soal ini pertam ubah dulu $\sin^2 x$ menjadi $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

14. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + c \Rightarrow -\frac{1}{2x^2} + c$

15. $\int \sqrt[3]{z}dz = \int z^{\frac{1}{3}}dz = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + c$

DAFTAR PUSTAKA

Sukino. 2007. *Matematika XIB*, Jakata : Erlangga

Purwanto,Heri dkk. 2005.*kalkulus 1*, Jakarta : PT Ercontara rajawali

Suharto dkk. 1996. *Matematika 3B smu*, Surakarta : PT Pabelan.

Putra, *matematika 3A*, Jakarta : PT Grasindo, 2004

Edwin J. Purcell, *kalkulus dan Geometri Analitis.* Erlangga, edisi kelima: Jakarta, 1994

Kuntarti, sulistiyono, Sri kuningsing, *matematika SMA dan MA 3a*. Erlangga : Jakarta, 2007

Kainginan,Marthen. *Cerdas belajar matematika* XIb. Grafindo media Prtama : Jakarta, 2005

Sri Setyaningsih, Embay Rohaeti. *Matematika dasar 2*. Pusat komputasi : Bogor, 2005