Unidad 14: **DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD**
EJERCICIOS PROPUESTOS

<table>
<tr><th>Contenidos</th><th>Criterios de evaluación</th><th>Estándares de aprendizaje evaluables</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Distribuciones estadísticas
- Tipos de variable. Representación gráfica y cálculo de parámetros.
- Interpretación de tablas y gráficas estadísticas.
- Obtención de la media y de la desviación típica de una distribución estadística.
Distribución de probabilidad de variable discreta
- Significado de los parámetros μ y σ.
- Cálculo de los parámetros μ y σ en distribuciones de probabilidad de variable discreta dadas mediante una tabla o por un enunciado.
Distribución binomial
- Reconocimiento de distribuciones binomiales, cálculo de probabilidades y obtención de sus parámetros.
Distribución de probabilidad de variable continua
- Comprensión de sus peculiaridades.
- Función de densidad.
- Reconocimiento de distribuciones de variable continua.
- Cálculo de probabilidades a partir de la función de densidad.
Distribución normal
- Cálculo de probabilidades utilizando las tablas
- Aproximación de la distribución binomial a la normal.
- Identificación de distribuciones binomiales que se puedan considerar razonablemente próximas a distribuciones normales y cálculo de probabilidades en ellas por paso a la normal correspondiente.</td><td>1. Conocer las distribuciones de probabilidad de variable discreta y obtener sus parámetros.</td><td>1.1. Construye la tabla de una distribución de probabilidad de variable discreta y calcula sus parámetros μ y σ.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Conocer la distribución binomial, utilizarla para calcular probabilidades y obtener sus parámetros.</td><td>2.1. Reconoce si una cierta experiencia aleatoria puede ser descrita o no mediante una distribución binomial identificando en ella n y p.</td></tr>
<tr><td>2.2. Calcula probabilidades en una distribución binomial y halla sus parámetros.</td></tr>
<tr><td>3. Conocer las distribuciones de probabilidad de variable continua.</td><td>3.1. Interpreta la función de probabilidad (o función de densidad) de una distribución de variable continua y calcula o estima probabilidades a partir de ella.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Conocer la distribución normal, interpretar sus parámetros y utilizarla para calcular probabilidades.</td><td>4.1. Maneja con destreza la tabla de la $N(0, 1)$ y la utiliza para calcular probabilidades.</td></tr>
<tr><td>4.2. Conoce la relación que existe entre las distintas curvas normales y utiliza la tipificación de la variable para calcular probabilidades en una distribución $N(\mu,\sigma)$.</td></tr>
<tr><td>4.3. Obtiene un intervalo centrado en la media al que corresponda una probabilidad previamente determinada.</td></tr>
<tr><td>5. Conocer la posibilidad de utilizar la distribución normal para calcular probabilidades de algunas distribuciones binomiales y utilizarla eficazmente.</td><td>5.1. Dada una distribución binomial reconoce la posibilidad de aproximarla por una normal, obtiene sus parámetros y calcula probabilidades a partir de ella.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS PROPUESTOS

(2 ejercicios voluntarios para entregar el día del examen)

1.1. Construye la tabla de una distribución de probabilidad de variable discreta y calcula sus parámetros

En la página 414 del libro de texto recomendado encontrarás las distribuciones de probabilidad. Si dispones de otro libro de texto más antiguo puede que no aparezca ya que este tema se estudiaba antes en la asignatura de primero: matemáticas I.

Veamos el siguiente ejemplo:

En una bolsa hay 20 bolas numeradas: 9 con el uno, 5 con el dos, y 6 con el tres. Se extrae una bola al azar.

Este es un experimento aleatorio X que puede tomar los valores X = 1, 2, 3.

Calculemos la probabilidad de cada suceso elemental:

Salir uno, lo escribimos así $P(X=1)=\frac{9}{20}=0{,}45$

Salir dos, será $P(X=2)=\frac{5}{20}=0{,}25$

Salir tres, será $P(X=3)=\frac{6}{20}=0{,}30$

La suma de estas tres probabilidades es 1.

Construimos la siguiente tabla:

X	P
1	0,45
2	0,25
3	0,30
Total	1

A esta distribución de probabilidad se la considera una distribución estadística y se le pueden calcular los parámetros media y desviación típica (lo estudiaste en el curso anterior, si no lo recuerdas consulta el anexo La calculadora científica en estadística)

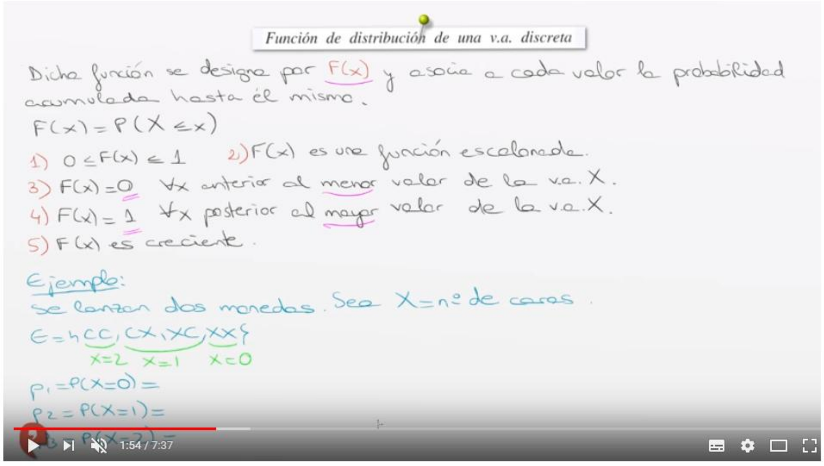
La media es $\bar{x}=1{,}85$ y la desviación típica $\sigma_x=0{,}85$

Esta distribución de probabilidad se dice que es de tipo discreto porque la variable X sólo puede tomar un limitado número de valores.

De todas las distribuciones de probabilidad discretas, este curso nos interesa estudiar aquellas que se adaptan al modelo binomial.

Aquí tienes un video de ayuda.

Video 14 – 1 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=N4nQnVav_Hc



Función de distribución de una variable aleatoria discreta

2.1. Reconoce si una cierta experiencia aleatoria puede ser descrita, o no, mediante una distribución binomial, identificando en ella n y p.

Vas a entender con un ejemplo cómo son las distribuciones binomiales y cómo se calculan sus probabilidades y parámetros.

Ejemplo 1.

Lanzamos cuatro dados, y contamos el número de doses obtenido.

La variable X= número de doses obtenido, puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, que se denominarían sucesos elementales (que no son equiprobables)

Detectamos que es de tipo binomial, porque un experimente simple (lanzar un dado) se repite un cierto número de veces n = 4. En el experimento simple se considera un suceso A = salir un dos, y en el experimento compuesto X = número de veces que sucede A = número de doses obtenido.

Pasemos a calcular las probabilidades de los sucesos elementales.

Llamamos $\boldsymbol{p = P(A) = P(dos) = \frac{1}{6} q = P(\bar{A}) = P(no\ dos) = \frac{5}{6}}$

Antes de ver la fórmula debemos recordar lo que son los números combinatorios:

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120 \qquad \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

Se pueden obtener con la calculadora (localiza la tecla nCr en la segunda fila a la izquierda):

El primero se teclea (cuatro teclas) 10 nCr 3 = y se obtiene 120.

La fórmula que aplicamos para calcular la probabilidad de un suceso es

$$P(X = r) = \binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$$

Vamos ya a calcular la probabilidad de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0}\cdot(\frac{1}{6})^0\cdot(\frac{5}{6})^{4-0} = 1\cdot 1\cdot(\frac{5}{6})^4 = 0,482$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}\cdot(\frac{1}{6})^1\cdot(\frac{5}{6})^{4-1} = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot(\frac{5}{6})^3 = 0,386$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^{4-2}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot(\frac{5}{6})^2=0,116$$
$$P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}=4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=0,015$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot(\frac{1}{6})^4\cdot(\frac{5}{6})^{4-4}=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot 1=0,001$$

Puedes comprobar que a pesar de haber redondeado a tres decimales, la suma de las probabilidades de los sucesos elementales vale exactamente 1.

Ahora si queremos calcular la probabilidad de cualquier suceso debemos utilizar los resultados anteriores. Por ejemplo, sea el suceso A = salir menos de tres veces el dos = obtener menos de tres doses = X < 3

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,482+0,386+0,116=0,984$$

Los parámetros estadísticos media y desviación típica se calculan mediante unas fórmulas:

$$\overline{x}=n\cdot p=4\cdot\frac{1}{6}=0,667\ ;\quad \sigma_x=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=0,745$$

Para finalizar, comentar que se escribe X = B (4 , 1/6), donde se escribe la n y la p.

Cómo se calculan las probabilidades en una distribución binomial lo estudiaremos en el punto siguiente. Te pido paciencia.

Vamos a realizar el siguiente ejercicio:

Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial y di los valores de *n*, *p*, μ y σ.

- **Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número probable de preguntas acertadas?**

- **Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.**
- **El 1% de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.**

En el primer ejemplo, queremos contar aciertos, luego el suceso A = acierto en una pregunta. El número de preguntas es n = 50. La variable aleatoria es X = número de veces que se obtiene el suceso A = número de aciertos. La probabilidad p es la probabilidad del suceso A. Como acertamos una de cada tres respuestas, $p=\frac{1}{3}$. La probabilidad del suceso contrario es $q=1-p=\frac{2}{3}$. Para calcular la media de la distribución binomial hay fórmula $\mu=n\cdot p=50\cdot\frac{1}{3}=\frac{50}{3}$. La desviación típica de la distribución binomial también tiene fórmula $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{50\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{10}{3}$.

En el segundo ejemplo, contamos caras.El suceso A = sale cara al lanzar una moneda. El número de lanzamientos es n = 400. La variable aleatoria es X = número de veces que sale cara. La probabilidad del suceso A es $p = \frac{1}{2}$. La probabilidad del suceso contrario es $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Para calcular la media de la distribución binomial hay fórmula $\mu = n \cdot p = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$. La desviación típica de la distribución binomial también tiene fórmula $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$.

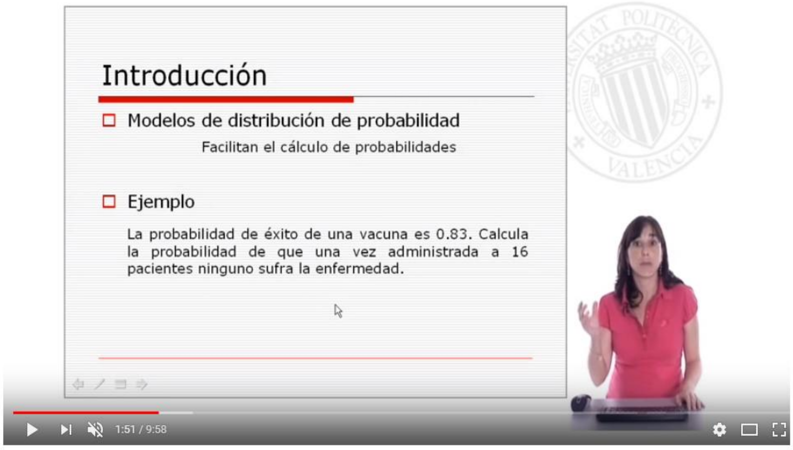
En el tercer ejemplo, contamos cerraduras defectuosas. El suceso A = una cerradura es defectuosa. El número de cerraduras es n = 1000. La variable aleatoria es X = número de cerraduras defectuosas. La probabilidad del suceso A es $p = \frac{1}{100}$. La probabilidad del suceso contrario es $q = 1 - p = \frac{999}{100}$. Para calcular la media de la distribución binomial hay fórmula $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{100} = 10$. La desviación típica de la distribución binomial también tiene fórmula $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{999}{100}} = 3,15$.

2.2. Calcula probabilidades en una distribución binomial y halla sus parámetros

Si dispones del libro de texto recomendado o de algún libro de texto de la asignatura del curso anterior localiza la distribución binomial y estudia con atención las explicaciones de cómo son sus fórmulas

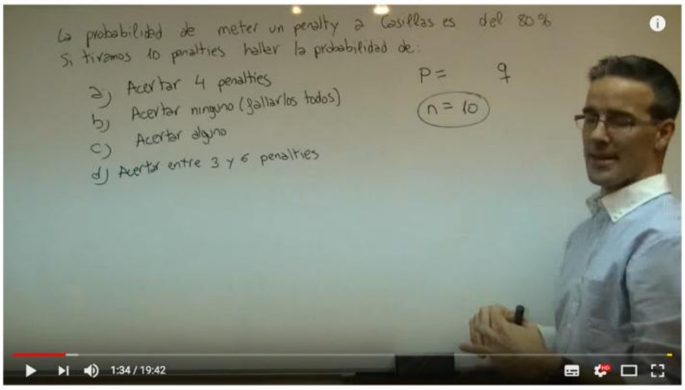
Sigamos con un video de ayuda.

Video 14 – 2 – 1 : **https://www.youtube.com/watch?v=sGfGVwiRs3I**



Distribución binomial | | UPV

Video 14 – 2 – a :https://www.youtube.com/watch?v=VbIyBmaoC-s



Distribucion Binomial BACHILLERATO Selectividad Normal Tipificar

Te ofrezco a continuación varios ejercicios resueltos.

Ejemplo 1.-

Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

Se trata de una distribución binomial con $n = 7$ y $p = 0,5 \quad \to \quad B(7; 0,5)$

$$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^4 = 35 \cdot 0,125 \cdot 0,0625 \approx 0,273$$

$$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^2 = 21 \cdot 0,03125 \cdot 0,25 \approx 0,164$$

$$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot (0,5)^6 \cdot (0,5) = 7 \cdot 0,015625 \cdot 0,5 \approx 0,0547$$

$$\mu = n\,p = 7 \cdot 0,5 = 3,5$$

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{7 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 1,323$$

Ejemplo 2.-

En una distribución binomial $B(10; 0,4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$ y el valor de cada uno de los parámetros μ y σ.

$$P[x = 0] = 0,6^{10} = 0,006047$$

$$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 = 120 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 = 0,215$$

$$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5 = 252 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5 = 0,201$$

$$P[x = 10] = 0,4^{10} = 0,000105$$

$$\mu = 10 \cdot 0,4 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{2,4} = 1,55$$

La última cuestión que vamos a tratar en este apartado es cómo decidir si un conjunto de datos se ajusta a una distribución binomial.

Partimos de un conjunto de datos recogidos de un experimento aleatorio. Los presentamos en una tabla de frecuencias. Calculamos la media. A partir de este parametro deducimos el valor de p. Calculamos los valores de la distribución binomial B(n , p). comprobamos si los datos del experimento se ajustan a estos valores obtenidos con la binomial y decidimos.

Veamos un ejemplo:

Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta. Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no.

x_i	4	3	2	1	0
f_i	23	48	17	9	3

Paso 1. Calculamos la media de esta tabla:

La media es $\bar{x} = 2{,}79$.

Paso 2. Deducimos la p.

Como $n = 4,\ \bar{x} = np \rightarrow 2{,}79 = 4p \rightarrow p = 0{,}6975$

Paso 3. Calculamos las probabilidades de la binomial B(4, 0,6975)

Si fuera una binomial, $p = 0{,}6975$ sería la probabilidad de que uno cualquiera de los alumnos asistiera un día a clase. $q = 0{,}3025$.

Con este valor de p se obtiene la siguiente tabla:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS
0	$q^4 = 0{,}008$	0,8	1
1	$4\,p\,q^3 = 0{,}077$	7,7	8
2	$6\,p^2\,q^2 = 0{,}267$	26,7	27
3	$4\,p^3\,q = 0{,}411$	41,1	41
4	$p^4 = 0{,}237$	23,7	24

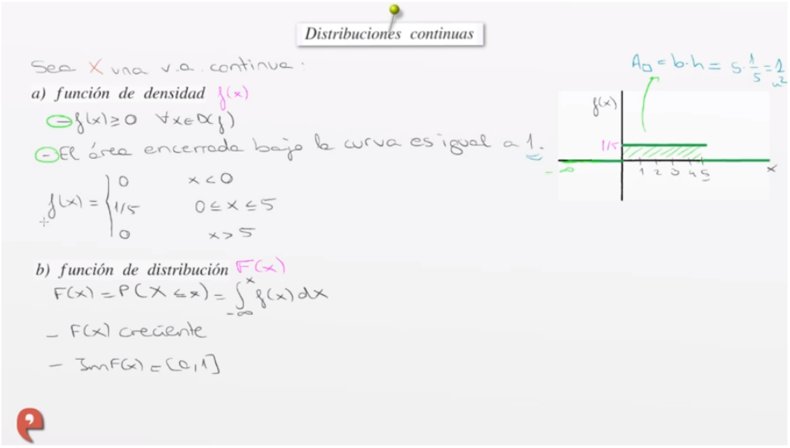
Paso 4. Comparamos los valores esperados de los valores obtenidos en la encuesta.

VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
1	3	2
8	9	1
27	17	10
41	48	7
24	23	1

La mayor de las diferencias es 10. Es demasiado grande en comparación con el total, 100. Hemos de rechazar la hipótesis de que se trata de una binomial.

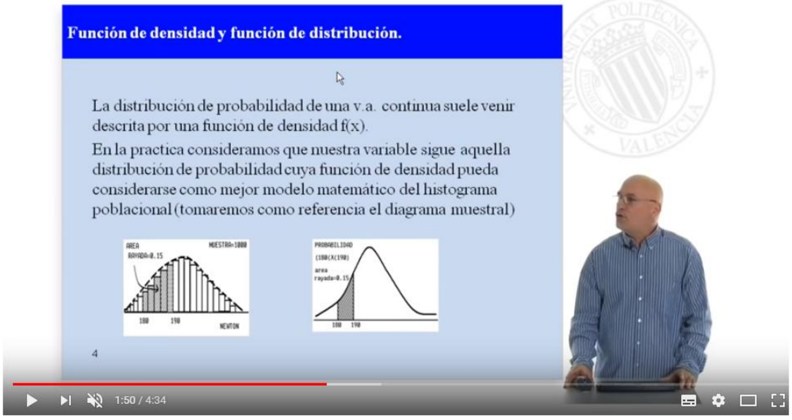
3.1. Interpreta la función de probabilidad (o función de densidad) de una distribución de variable continua y calcula o estima probabilidades a partir de ellas

Empezamos con el siguiente video.
Video 14 – 3 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=gDmdm2BlDIY



Funciones de densidad y distribución de una variable aleatoria continua

Otro video donde te explican qué es la función de densidad.
Video 14 – 3 – 2 : https://www.youtube.com/watch?v=6Tm-_YEphbg

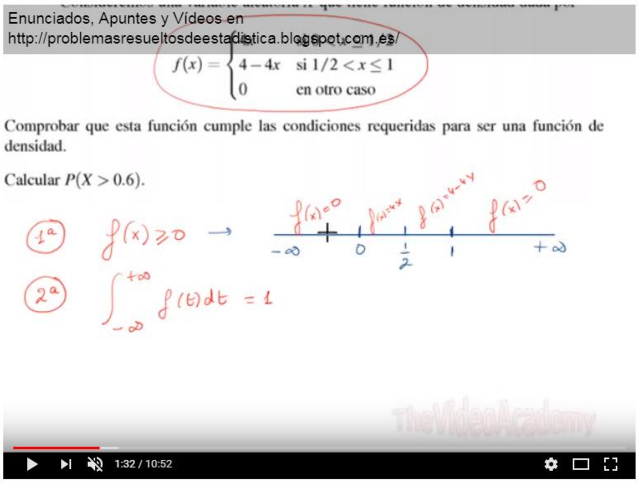


Función de densidad y función de distribución | | UPV

Difícil ¿verdad?

En el siguiente video explican cómo calcular probabilidades utilizando la función de densidad. Aparecen las integrales, y nosotros aún no las hemos estudiado. Por lo tanto volveremos a ver este video cuando estudiemos las aplicaciones prácticas de las integrales.

Video 14 – 3 – 3 : https://www.youtube.com/watch?v=LvJ0EsR4azc



Función de densidad y probabilidad de una variable continua

4.1. Maneja con destreza la tabla de la N(0, 1) y la utiliza para calcular probabilidades

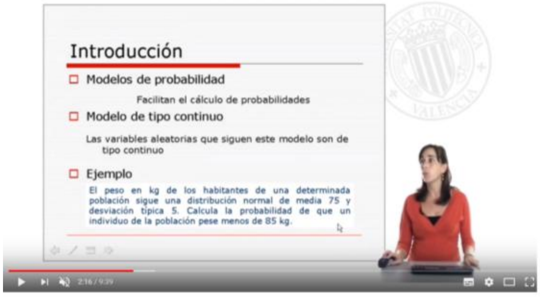
En tu libro de texto encontrarás una breve reseña histórica acerca de la denominada curva de errores. La distribución normal es la más importante de las distribuciones de probabilidad. Muchos resultados de censos, medidas, etc. tienen distribuciones de frecuencias que muestran una sorprendente similitud con la curva de errores, o campana de Gauss.

En tu libro de texto se definen las distribuciones de probabilidad continua, y en un gráfico se compara una distribución estadística obtenida a partir de un experimento o encuesta y su similitud con la distribución ideal o matemática.

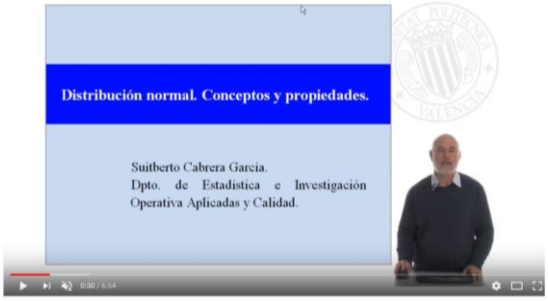
La distribución normal es un modelo matemático que nos sirve para hacer estimaciones en cuestiones de nuestro mundo real. Pero hacer **una estimación** no es encontrar **la verdad** de las cosas.

Te recomiendo la visión de estos videos. Sobre todo si no tienes un libro de texto a mano.

Video 14 – 4 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=qnkoCZhnEwk
Video 14 – 4 – 2 : https://www.youtube.com/watch?v=b_Oee84PrGg



Distribución normal | | UPV



Distribución normal. Conceptos y propiedades | | UPV

El objetivo de esta unidad es resolver problemas como los siguientes:

Un centro de enseñanza va a presentar, este curso, 240 alumnos al examen de selectividad y se sabe que, de ese centro, suele aprobar el 95% de los presentados. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben:

a) más de 200, **b) más de 220,**

c) más de 230, **d) más de 235 alumnos?**

Un examen tiene 38 preguntas del tipo Verdadero-Falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 20 preguntas.

Si se responde al azar, halla:

a) La probabilidad de aprobar el examen.

b) La probabilidad de que el número de respuestas correctas esté entre 25 y 30.

El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos. Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 minutos y 21 minutos.

Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

En tu libro de texto, o apuntes, se explica el modelo matemático de la distribución normal.

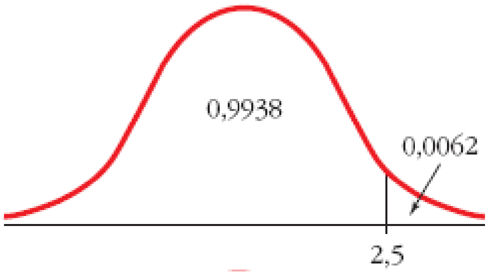
Este gráfico es la curva denominada campana de Gauss. El área bajo la curva vale exactamente 1. Ves que es una región del plano que no está cerrada (la curva baja hasta aproximarse al eje X tanto como deseemos pero nunca llega a tocar)

Esta que ves representada se denomina distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Existen otras muchas campanas de Gauss, pero esta es la única de la que dispondrás de una tabla para realizar cálculos matemáticos.

Primero vamos a aprender a utilizar dicha tabla y calcular áreas:

La tabla (que encontrarás en un anexo en Apuntes) representa los valores de función

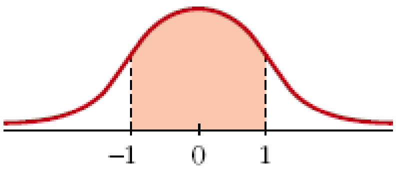
F(x) que no es la función representada (en color rojo) sino la función área acumulada en el intervalo $(-\infty, x)$)



Si miramos en la tabla F(2,50) = 0,9938, pero ese no es el valor de la función en rojo sino la del área acumulada en el intervalo $(-\infty, 2{,}5)$ como ves en el gráfico.

A partir del valor 0,9938 podemos averiguar el área acumulada bajo el gráfico en el intervalo $(2{,}5, +\infty)$ que sería 1- 0,9938 = 0,0062.

Veamos cómo se calculan áreas ayudándonos de este gráfico:

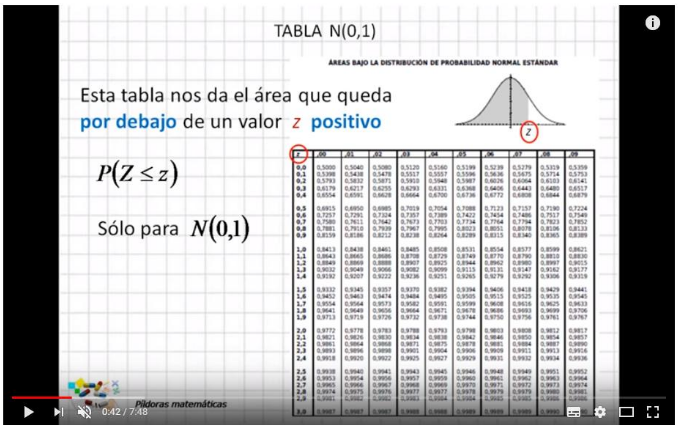


- El área bajo la curva suma 1. Por lo tanto dos trozos blancos más el rosa vale 1.
- F(- 1) es un trozo blanco (se corresponde a la izquierda de -1)
- F(1) es un trozo blanco más un trozo rosa (se corresponde a la izquierda de -1)
- F(- 1) + F(1) = Blanco + Blanco + Rosa = 1. Despejando F(-1) = 1 – F(1)
- El área en un intervalo abierto es lo mismo que en un intervalo cerrado.
- Sea P la función parte del area, que luego llamaremos probabilidad, P(X< -1) y P(X≤ -1) es lo mismo, es un trozo blanco es F (- 1) (el igual lo único que le añade es una línea en – 1, pero el área de una línea es cero; piensa que el área de un círculo es la misma con o sin el borde que es una circunferencia)
- P(X< 1) y P(X ≤ 1) es lo mismo, es un trozo blanco más el rosa que es F(1)
- P(X > 1) y P(X ≥ 1) es el mismo área, y se corresponde con un trozo blanco (a la derecha de 1) un trozo blanco es F(-1) que vale 1 – F (1)
- P(- 1< X < 1) y P(- 1 ≤ X ≤ 1) es lo mismo, es el trozo rosa, que también podemos obtener como la diferencia F(1) – F(- 1)

Un resumen de las fórmulas que emplearemos es el siguiente:

$$F(-a) = 1 - F(a)$$
$$P(X \leq +a) = P(X < +a) = F(a) \; y \; se \; mira \; en \; la \; tabla$$
$$P(X \leq -a) = P(X < -a) = F(-a) = 1 - F(a)$$
$$P(X \geq +a) = P(X > +a) = 1 - P(X \leq +a) = 1 - F(a)$$
$$P(X \geq -a) = P(X > -a) = 1 - F(-a) = F(a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(a) - F(b)$$
$$P(X = a) = 0$$

Un video donde te explican todo esto gráficamente:
https://www.youtube.com/watch?v=59I-6L5QMfc



04 Cómo usar la tabla de distribución normal

A la variable N(0, 1) cuyos valores aparecen en la tabla, en vez de llamarla X se le suele designar por la letra Z. Aquí tienes unos cuantos ejercicios:

Halla las siguientes probabilidades:

a) $P[z \le 0{,}84]$ **b)** $P[z < 1{,}5]$ **c)** $P[z < 2]$ **d)** $P[z < 1{,}87]$

e) $P[z < 2{,}35]$ **f)** $P[z \le 0]$ **g)** $P[z < 4]$ **h)** $P[z = 1]$

Mirando directamente la tabla, obtenemos:

a) 0,7996 b) 0,9332 c) 0,9772 d) 0,9693

e) 0,9906 f) 0,5000 g) 1 h) 0

Halla:

a) $P[z > 1{,}3]$ **b)** $P[z < -1{,}3]$ **c)** $P[z > -1{,}3]$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$ **e)** $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$ **f)** $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

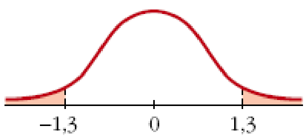
a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = 0{,}0968$

c) $P[z > -1{,}3] = 1 - 0{,}0968 = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = 0{,}0718$



En una distribución $N(0, 1)$, **calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b)** $P[z \le 2]$ **c)** $P[z \ge 2]$

d) $P[z \le -2]$ **e)** $P[z \ge -2]$ **f)** $P[-2 \le z \le 2]$

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \leq 2] = 0{,}9772$

c) $P[z \geq 2] = 1 - 0{,}9792 = 0{,}0228$

d) $P[z \leq -2] = 0{,}0228$

e) $P[z \geq -2] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$

f) $P[-2 \leq z \leq 2] = 2\,(P[z \leq 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

Ejercicio 14 – 1 .-

En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:

a) $P[z = 2]$ **b) $P[z \leq 2]$** **c) $P[z \geq 2]$**

d) $P[z \leq -2]$ **e) $P[z \geq -2]$** **f) $P[-2 \leq z \leq 2]$**

4.2. Conoce la relación que existe entre las distintas curvas normales y utiliza la tipificación de la variable para calcular probabilidades en una distribución N(μ, σ)

Ahora haremos un cambio de base y utilizaremos la tabla de Z la normal $N(0,1)$ $de\ media$ 0 $y\ desviación\ típica$ 1 para calcular áreas de X distribuciones normales $N(\mu, \sigma)$ $de\ media\ \mu\ y\ desviación\ típica\ \sigma$

El cambio de base es el siguiente: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Lo entenderás con un ejemplo:

Si $X = N(20, 8)$ sus valores están cercanos a la media 20, pues mediante el cambio de base les hacemos corresponder valores de Z que están cercanos a 0.

X = 19 le corresponde $Z = \frac{19-20}{8} = -0{,}125$

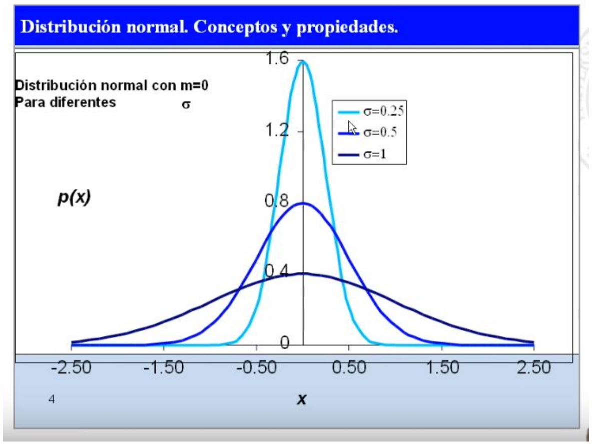
X = 20 le corresponde $Z = \frac{20-20}{8} = 0$

X = 22 le corresponde $Z = \frac{22-20}{8} = 0{,}25$

Y así todos los valores de X quedan transformados en valores de Z. Para que lo entiendas mejor si tienes una serie de valores en euros y quiere transformarlos en valores de céntimos de euro, la fórmula del cambio de base sería multiplicar por 100. Y al valor 3,50 euros le asociamos el valor 350 euros.

Observa en el minuto 1:45 del siguiente video, que ya te recomendé en el apartado anterior, cómo hay diferentes curvas normales.

Video 14 – 5 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=b_Oee84PrGg



A este proceso de cambiar de base se denomina TIPIFICACIÓN.

En un examen tipo test, la media fue de 28 puntos, y la desviación típica, de 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada de los alumnos que obtuvieron:

a) 38 puntos.

b) 14 puntos.

c) 45 puntos.

d) 10 puntos.

$\mu = 28; \quad \sigma = 10$

a) $\dfrac{38-28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14-28}{10} = -1{,}4$

c) $\dfrac{45-28}{10} = 1{,}7$ d) $\dfrac{10-28}{10} = -1{,}8$

Veamos en el siguiente ejemplo cómo se utiliza esto:

En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:

a) $P[x \leq 173]$ **b)** $P[x \geq 180{,}5]$ **c)** $P[174 \leq x \leq 180{,}5]$

d) $P[161 \leq x \leq 180{,}5]$ **e)** $P[161 \leq x \leq 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

(Observa cómo todos los valores de X que aparecen arriba los vamos a transformar en valores de Z mediante la fórmula $Z = \frac{X-173}{6}$

a) $P[x \leq 173] = 0{,}5$

b) $P[x \geq 180{,}5] = P\left[z \geq \dfrac{180{,}5 - 173}{6}\right] = P[z \geq 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

c) $P[174 \leq x \leq 180{,}5] = P[0{,}17 \leq z \leq 1{,}25] = 0{,}3269$

d) $P[161 \leq x \leq 180{,}5] = P[-2 \leq z \leq 1{,}25] = 0{,}8716$

e) $P[161 \leq x \leq 170] = P[-2 \leq z \leq -0{,}5] = 0{,}2857$

f) $P[x = 174] = P[z = 0{,}1667] = 0$

g) $P[x > 191] = P[z > 3] = 1 - \phi(3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

h) $P[x < 155] = P[z < -3] = 1 - \phi(3) = 0{,}0013$

Veamos ahora cómo aplicamos esto a distribuciones estadísticas:

La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm, y la desviación típica, de 10 cm.

Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm.

¿Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm?

x es $N(165, 10)$; $n = 200$ alumnos

$P[x > 180] = P\left[z > \dfrac{180 - 165}{10}\right] = P[z > 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

$200 \cdot 0{,}0668 = 13{,}36 \approx 13$ alumnos

Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

a) Más de 61 kg.

b) Entre 63 y 69 kg.

c) Menos de 70 kg.

d) Más de 75 kg.

x es $N(65, 8)$

a) $P[x > 61] = P\left[z > \dfrac{61 - 65}{8}\right] = P[z > -0{,}5] = P[z < 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[63 < x < 69] = P[-0{,}25 < z < 0{,}5] = 0{,}2902$

c) $P[x < 70] = P[z < 0{,}625] = 0{,}7357$

d) $P[x > 75] = P[z > 1{,}25] = 1 - P[z \leq 1{,}25] = 0{,}1056$

Ejercicio 14 – 2 .-

Resuelve en tu cuaderno el siguiente ejercicio que aparece en el video.
Video 14 – 5 – a : https://www.youtube.com/watch?v=wD2BnCKC0nE

2.- Dada una variable aleatoria X distribuida según una normal con media 25 y desviación típica 5, obtener:

a) La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores entre 14 y 28.
b) La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor mayor que 23.
c) La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor que 10.

Ahora aprenderemos a manejar la tabla de Z al revés para realizar unos ejercicios interesantes.

Di el valor de k en cada caso:

a) $P[z \leq k] = 0{,}7019$ **b) $P[z < k] = 0{,}8997$**

c) $P[z \leq k] = 0{,}5040$ **d) $P[z < k] = 0{,}7054$**

a) $k = 0{,}53$ b) $k = 1{,}28$ c) $k = 0{,}01$ d) $k = 0{,}54$

(este ejercicio ha sido fácil pues
$P(Z < k) = F(k)$ *y lo buscamos en la tabla al revés es decir localizamos el valor para que* $F(0{,}53) = 0{,}7019$, *a veces no encontraremos el k de forma exacta y elegiremos el que más se aproxime*)

Di el valor aproximado de k en cada caso:

a) $P[z < k] = 0{,}9533$ **b) $P[z \leq k] = 0{,}62$**

a) $k \approx 1{,}68$ b) $k \approx 0{,}305$

F(1,68) = 0,9535,es el que mejor se aproxima
F(0,30) = 0,6179 y F(0,31) = 0,6217 uno se aproxima por defecto y otro por exceso y prácticamente la diferencia es la misma, decidimos tomar la media aritmética entre los dos valores 0,30 y 0,31 que resulta ser 0,305.

Calcula k en cada uno de los siguientes casos:

a) $P[z < k] = 0{,}8365$

b) $P[z > k] = 0{,}8365$

c) $P[z < k] = 0{,}1894$

a) $P(Z < k) = F(k)$ luego debemos buscar F(k) = 0,8365 o el que más se aproxime y lo encontramos K = 0,98
b) $P(Z > k) = 1 - F(k)$ luego 1 – F(k) = 0,8365 y despejando F(k) = 0,1635, y como es menor que 0,5000 no lo encontramos en la tabla por lo tanto deducimos que K es negativo y volvemos a empezar. $P(Z > -k) = F(k)$ luego debemos buscar F(k)=0,8365 o el que más se aproxime y lo encontramos k = 0,98, y la solución hemos dicho que era negativa, por lo tanto k = - 0,98
c) $P(Z < k) = F(k)$ luego debemos buscar F(k) = 0,1894 , y como es menor que 0,5000 no lo encontramos en la tabla por lo tanto deducimos que K es negativo y

volvemos a empezar $P(Z < -k) = 1 - F(k)$ luego 1 – F(k) =0,1894, y despejando F(k) = 0,8106 que buscamos en la tabla y lo encontramosen 0,88, la soluciónes k = -0,88

¿Complicado? Un poco, sí. En el libro de texto encontrarás varios ejercicios resueltos, practica esto de usar la tabla al revés.

4.3. Obtiene un intervalo centrado en la media al que corresponda una probabilidad previamente determinada.

En el siguiente video patrocinado por una marca de bebidas alcoholicas, de las que te pido encarecidamente que apartes de tu vida, explican qué es un intervalo centrado en la media y resuelven un ejercicio.

Video 14 – 6 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=YDVQ2T_uJnk

5.1. Dada una distribución binomial, reconoce la posibilidad de aproximarla por una normal, obtiene sus parámetros y calcula probabilidades a partir de ella

Con el siguiente ejemplo estudiarás por qué la distribución binomial se aproxima con una distribución normal.

Lanzamos una moneda 80 veces y contamos el número de veces que sale cara. La variable estadística X= numero de caras obtenido, sigue una distribución binomial de n = 80 y p = 0,5.

Calculemos la probabilidad de que hayan salido exactamente 43 caras.

$$P(X = 43) = \binom{80}{43} \cdot 0{,}5^{43} \cdot 0{,}5^{37} = 0{,}071194$$

Calculemos la probabilidad de que hayan salido menos de 43 caras. Pues nos llevará más de media hora, hemos de calcular P(X = 0) +….+ P(X = 42)

Calcular la probabilidad de que hayan salido más de 43 caras. Ni lo intentamos, nos cansamos sólo de imaginar todos los cálculos que deberíamos hacer.

Aproximamos la binomial calculando la media $n \cdot p = 80 \cdot 0{,}5 = 40$ y la desviación típica $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{80 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 4{,}47$, entonces la distribución normal que la aproxima es X = N(40, 4,47)

Vamos a utilizar la aproximación:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de 43 caras al lanzar una moneda 80 veces?

$$P(X<43)binomial = P(X<42{,}5)\ normal = P\left(Z<\frac{42{,}5-40}{4{,}47}\right) = P(Z<0{,}56) =$$
$$= F(0{,}56) = 0{,}7123$$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 43 caras al lanzar una moneda 80 veces?

$$P(X>43)binomial = P(X>43{,}5)\ normal = P\left(Z>\frac{43{,}5-40}{4{,}47}\right) = P(Z>0{,}78) =$$
$$= 1-F(0{,}78) = 1-0{,}7823 = 0{,}2177$$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 43 caras al lanzar una moneda 80 veces?
- $P(X=43)binomial = P(42{,}5<X<43{,}5)normal = P\left(\frac{42{,}5-40}{4{,}47}<Z<\frac{43{,}5-40}{4{,}47}\right) =$

$$P(0{,}56<Z<0{,}78) = F(0{,}78)-F(0{,}56) = 0{,}7823-0{,}7123 = 0{,}07$$

Evaluemos las ventajas de usar la aproximación. Comprobamos que calcular menos de 43 caras, o más de 43 caras lo hemos hecho en menos de un minuto. Y que calcular exactamente 43 caras, hemos obtenido una aproximación muy buena.

Nota: como los valores de la binomial son discretos: …41 42 43 44 45… al aproximarlo con una normal que son continuos debemos, para ser más precisos, tomar los valores intermedios, así has visto que X< 43 binomial se toma X < 42,5 normal. De la misma forma X> 43 binomial se aproxima como X> 43,5 normal.

Otro ejemplo:

La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es 0,2. Si lanzara 1 000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera, ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 220 veces?

Se trata de una $B(1\,000;\ 0{,}2)$. La probabilidad la calculamos por aproximación normal:

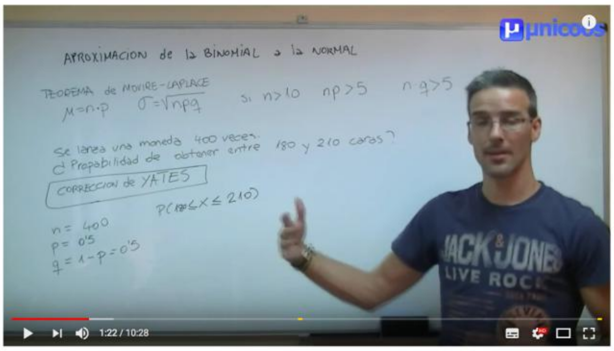
$\mu = 1000 \cdot 0{,}2 = 200;\quad \sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 12{,}65$

x es $B(1000;\ 0{,}2) \rightarrow x'$ es $N(200;\ 12{,}65)$

$P[x>220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq 1{,}62] = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

No siempre aproximamos una binomial con una normal. La aproximación es aceptable cuando se cumple la condición n·p > 30. Es decir, no la podemos ajustar en ejemplos vistos en la unidad anterior, por ejemplo, lanzar cinco dados, o lanzar 10 monedas.

Video 14 – 7 – a : https://www.youtube.com/watch?v=uy4ZvltPj0s



Aproximacion de Binomial a Normal - Correccion de YATES BACHILLERATO matematicas

Hemos acabado con las unidades de la primera evaluación, o mejor dicho, ellas han acabado con nosotros. Demasiados temas. Pues sí. La programación de esta asignatura ha crecido con la nueva ley de educación. A ~~fastidiarse~~ tocan.