UNIDAD DIDÁCTICA : LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas
(Esp: Matemáticas)

UNIVERSIDAD DE GRANADA

CURSO 2009/2010

Este trabajo fin de máster ha sido elaborado por:
D. José Antonio Fernández Plaza.

Bajo la supervisión de: D. Luis Rico Romero.

A mi familia, profesores y compañeros que me han ayudado durante mi etapa universitaria.

"Tended a ser un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y maestros en algo, para bien de los demás".
(Pedro Puig Adam)

"La buena didáctica es aquella que deja que el pensamiento del otro no se interrumpa y que le permite, sin notarlo, ir tomando buena dirección."
(*Enrique Tierno Galván)*

ÍNDICE

0. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

Se define el Currículo como "el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas". (*LOE, Título preliminar, Capítulo III, Artículo 6*)

La planificación del currículo escolar se realiza desde dos niveles de responsabilidad; el primero a nivel político y administrativo, que le corresponde al Estado y a la comunidad autónoma, en este caso, Andalucía; y el segundo a nivel profesional que le corresponde a la administración educativa y a mí como futuro docente. En otras palabras, el Estado y el Parlamento andaluz deciden en la redacción de leyes qué elementos conceptuales y culturales deben ser objeto de trabajo escolar y los docentes debemos decidir de qué manera vamos a trabajar en nuestros centros y aulas dichos elementos. (*LOE, Título V, Capítulo II, Artículo 120)*

Los elementos básicos que integran el currículo sobre los que hay que tomar decisiones previas en una programación de la enseñanza son los siguientes:

1. *Objetivos y competencias básicas*. Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
2. *Contenidos*. Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
3. *Metodología*. Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
4. *Evaluación*. Proceso, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

Existen tres niveles de concreción curricular caracterizados por las tomas de decisiones sobre los elementos básicos del currículo –objetivos, competencias básicas en su caso, contenidos, secuencia, metodología y evaluación-:

- *Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas*. Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado. Dado que las comunidades autónomas tienen competencias plenas en materia educativa, corresponde en Andalucía, por tanto, al parlamento andaluz, que elabora las leyes educativas básicas y a la administración educativa andaluza que las desarrolla mediante decretos y normas.

- *Proyecto educativo*. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde al centro escolar, a su profesorado organizado en equipos educativos y departamentos didácticos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los órganos colegiados de control y gobierno del centro.
- *Programación de aula*. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones (Cultural, Cognitiva, Formativa y Social) que a su vez se descomponen en cuatro niveles (Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico) *(L. Rico).*

Por tanto, esta unidad didáctica se ubica en el nivel de planificación para los profesores, tomando decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social)

La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, que consta de:
1. Análisis de contenido (Estructura conceptual, desarrollo histórico, sistemas de representación y fenomenología).
2. Análisis cognitivo (Objetivos y competencias, errores y dificultades, Oportunidades de aprendizaje).
3. Análisis de Instrucción (Diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos).
4. Análisis de la evaluación (Instrumentos y criterios de evaluación).

1. ANÁLISIS DE CONTENIDO.

1.1 DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEMA.

La evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en tres grandes etapas, que se diferencian básicamente por la concepción de límite que subyace en ellas aunque la separación no siempre sea nítida. En la larga evolución del concepto (desde la matemática griega hasta el siglo XIX) se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción, que se utiliza de forma implícita desde la época griega y que no llega a su forma actual hasta el siglo pasado, en parte para validar algunos resultados ya obtenidos y en parte para demostrar otros más generales.

PERIODO CLÁSICO (EUDOXO DE CNIDO Y ARQUÍMEDES (S. V A.C)

Aparece en esta etapa una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite. Se basa en la noción de infinito potencial, la falta de un sistema de numeración adecuado y la discretización). Dentro de los métodos que se usaron se destaca:

Método de exhaución. Se atribuye a Eudoxo, aunque su utilización más conocida la hizo Arquímedes en la cuadratura de la parábola. El método se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. Consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada.

Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de n lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de n triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos hasta que la diferencia queda bastante pequeña. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Otros autores que no he mencionado pero tienen importancia en esta etapa son:

Zenón (Paradojas que ponen de manifiesto la diferencia entre continuo y discreto), Aristóteles (Que trabaja con la noción de infinito actual en su metafísica) y Herón (Dio métodos de cuadraturas)

REVOLUCIÓN CIENTÍFICA (DESDE KEPLER (S. XVI) HASTA NEWTON Y LEIBNITZ (S. XVIII))

Esta etapa se caracteriza por la utilización de métodos matemáticos para dar respuesta a problemas físicos, aunque se detectó falta de cuidado en la formalización rigurosa de los conceptos matemáticos y procedimientos involucrados. Algunos de los problemas físicos que se trataron fueron:

- Dada la fórmula del espacio en función del tiempo, obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio
- Obtención de la tangente a una curva. En óptica es necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general (cuando surgen nuevas curvas) pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva sólo sirve para algunas cónicas.
- Estudio de máximos y mínimos de una función, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, etc.
- Estudio de centros de gravedad y atracción gravitatoria.

Los métodos que aparecen a continuación fueron el germen del análisis infinitesimal y surgieron motivados por las exigencias de la mecánica, de la astronomía y de la física. El álgebra aportó las herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; faltaba algo que les armonizara y además les diera ese carácter de universalidad.

Método de los infinitésimos de Kepler (1571-1630). Era utilizado para resolver problemas de medidas de volúmenes o áreas como los que aparecen en *Nova stereometria doliolum vinatorum* (1615).La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos.

Galileo utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

Método de los indivisibles de Cavalieri (1598-1647). Fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. Lo hace en su libro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635).

Método de Fermat para buscar extremos de curvas. Lo aplicó a las “parábolas e hipérbolas de Fermat” y consiste en considerar que en una “cumbre” o en un “valle” de la curva, cuando ε es pequeño, los valores de la función $f(x)$ y $f(x+\varepsilon)$ están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer $f(x+\varepsilon)=f(x)$, dividirlo por ε y tomar $\varepsilon=0$. Si bien no habla de límite, está bastante cerca.

Método de las tangentes. Fermat envía a Mersenne en 1637 una memoria que se titula Sobre las tangentes a las líneas curvas donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, si bien sólo lo utiliza con la parábola. En un intento de clarificar dicho método, Descartes crea el suyo propio según reza en la carta que envía a Mersenne en Mayo de 1638 y, así, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende es dibujar la recta tangente en el punto $P=(x, f(x))$ y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se consideraba $f(x+\varepsilon)-f(x)$, se dividía por ε y se tomaba $\varepsilon=0$, lo que equivale a hallar el límite funcional en la abscisa del punto P. Pero Fermat no usa el concepto de límite ni el de derivada debido a que no calcula la pendiente de la recta tangente, sólo la subtangente.

Método de Barrow (1630-1677). Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos e y a, que equivalen a los Δx y Δy actuales.

NEWTON Y LEIBNITZ.

Newton (1648-1727) es el creador de la teoría de las fluxiones, un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Propone el método de las fluxiones, expuesto en la obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (publicada en 1736), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocidas la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes. Para resolver estos problemas aplicó sendos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. En 1704 en su obra *Tractatus quadratura curvarum*, explicita el método de las "razones primeras y últimas", en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo cual despertó bastantes críticas de rigor en la comunidad matemática.

Leibnitz (1646-1716), por su parte preocupado por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales. Se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Usa una notación que perdura actualmente, pero no aclara lo que, para él significa “infinitamente pequeño”. Para peor, a veces habla de "infinitamente, infinitamente pequeño".

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus, pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita como útil al ser una herramienta para resolver problemas.

Ahora bien, esta idea de límite como aproximación sin más no basta. Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar “más que cualquier diferencia dada”, lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

PASO A LA FUNDAMENTACIÓN DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL (SEGUNDA MITAD DEL S.XVIII)

Utilizando infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto de límite.

Euler (1707-1743) toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama Análisis y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales.

D'Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de la *Encyclopédie*, D´Alembert escribe la siguiente definición de límite:

"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad,
cuando la segunda puede aproximarse a la primera
más que cualquier cantidad dada por pequeña que
se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad
que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad
a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre
una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable."

En esta definición las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma.

Lagrange (1736-1813) trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

SIGLO XIX Y PRINCIPIOS DEL SIGLO XX. ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS.
A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos. De estos matemáticos destaco a:

Cauchy (1789-1857). Retoma el concepto de límite de D'Alembert, rechazando el planteamiento de Lagrange, prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente:

"…, cuando los sucesivos valores que toma una variable
se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de
manera que terminan por diferir de él en tan poco
como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás"

La noción de límite dada por D'alembert es más objetiva que la de Cauchy, ya que en ésta aparece el término "tanto como queramos" que la subjetiviza. Define además infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero.

Bolzano (1781-1848) da una definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Weierstrass (1815-1897) contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria del concepto de límite.

Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que aparece en la obra de su discípulo Heine Elemente, es la siguiente:

"Si, dado cualquier ε, existe un n_0, tal que para $0<n<n_0$,
la diferencia $f(x_0 \pm n)-L$ es menor en valor absoluto que
ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para
$x=x_0$".

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma. Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye una cuarta etapa en el desarrollo del concepto.

1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL.

La revisión histórica anterior me ayuda a diseñar y analizar la estructura conceptual del tema, donde expongo un resumen de los conceptos y procedimientos relacionados:

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL:

Hechos:

Términos:

- **Sucesión.**
- **Función.**
- **Límite.**
- **Tender a un número.**
- **Tender a infinito.**
- **Convergente, divergente.**
- **Indeterminación.**
- **Asíntota.**
- **Continuidad, discontinuidad.**

Notaciones:

- **Sucesiones:** (a_n)
- **Límite de sucesiones:** $lim(a_n)$
- **Límite de una función en un punto:** $\lim_{x \to a} f(x)$
- **Límite de una función en más o menos infinito:** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$
- **Límite lateral por la derecha:** $\lim_{x \to a^+} f(x)$
- **Límite lateral por la izquierda:** $\lim_{x \to a^-} f(x)$
- **Tipos de indeterminaciones** $(\frac{k}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty - \infty,\ 0 * \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty})$

Convenios:

- **El estudio de la continuidad se realiza en puntos del dominio mientras que en los puntos fuera del mismo sólo estudiaremos los límites laterales pero no será ni continua ni discontinua.**

Resultados:

- **El límite de una función, si existe, es único.**
- **El límite de una función constante en un punto es la misma constante.**
- **El límite de la función identidad en un punto es el valor de ese punto.**

- **Toda función constante es continua en $\mathbb{R}$.**
- **La función identidad, $f(x) = x$, es continua en $\mathbb{R}$.**

Conceptos:

- **Sucesión de números reales.**
- **Funciones polinómicas, racionales, circulares y radicales.**
- **Límite de una sucesión.**
- **Sucesión nula (Caso particular de la 1/n).**
- **Función: Dominio y recorrido.**
- **Límite de una función en un punto y en infinito.**
- **Límites laterales.**
- **Asíntota vertical.**
- **Asíntota horizontal.**
- **Asíntota oblicua.**
- **Función continua.**
- **Continuidad en un punto.**
- **Discontinuidad en un punto.**
- **Discontinuidad de salto.**
- **Discontinuidad evitable.**
- **Discontinuidad esencial.**

CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL:

Destrezas:

- **Cálculo de límites de una sucesión tanto finito como infinito por medio de una tabla de valores.**
- **Cálculo de límite de una función en un punto por sustitución directa o mediante representación gráfica.**
- **Calcular límites de funciones mediante las propiedades del límite respecto las operaciones con funciones a saber suma, producto y composición.**
- **Cálculo de límites laterales en un punto con ayuda de una tabla de valores.**
- **Reconocimiento de la continuidad de una función polinómica. Representación gráfica.**
- **Reconocimiento de la discontinuidad de una función en un punto por medio de la comparación de los límites laterales siempre que estos existan.**

- **Operaciones con funciones continuas.**

<u>Razonamientos:</u>

- **Deductivo: propiedades de las operaciones con límites y funciones continuas.**
- **Inductivo: regularidades en el cálculo de límites.**
- **Analógico: Establecer relaciones para resolución de indeterminaciones.**
- **Figurativo: Uso de tablas y representaciones gráficas.**

<u>Estrategias:</u>

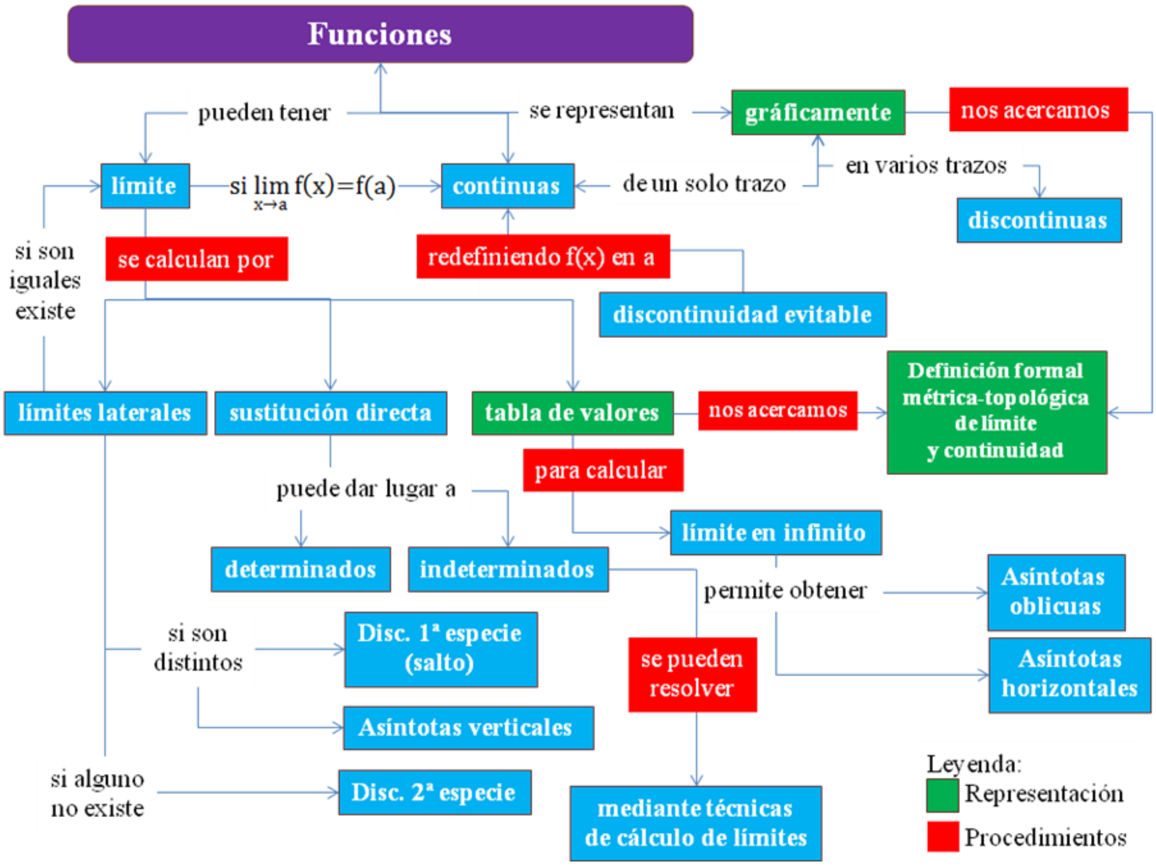
- **Reconocimiento de indeterminaciones en el cálculo del límite de una función o sucesión.**
- **Aplicación de técnicas de resolución de indeterminaciones** $(\frac{k}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty-\infty,\ 0*\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty})$ **tanto para funciones como para sucesiones.**
- **Cálculo de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y esbozo de las mismas.**
- **Reconocimiento de una discontinuidad esencial de una función en un punto.**
- **Técnicas de resolución de problemas donde estén involucrados los conceptos de límite y continuidad.**

<u>Estructuras:</u>

- $\mathbb{R}$**-Álgebra de las funciones continuas reales** $\mathcal{C}(\mathbb{R})$**.**
- $\mathbb{R}$**-Álgebra real de las funciones continuas en un intervalo** $\mathcal{C}([a,b])$**.**

MAPA CONCEPTUAL:

Presento a continuación un mapa conceptual que relaciona los conceptos, sistemas de representación (cuyo estudio detallaré en el apartado correspondiente de la unidad didáctica) y algunos procedimientos entre sí:



1.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

En la siguiente sección procedo a describir los distintos sistemas que utilizaré en el tema para representar los conceptos de límite y continuidad.

Abordaré cinco tipos de representaciones, en los cuales destacaré las características más importantes, así como su modo de uso y el fin de cada uno.
Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, gráfico-dinámica, gráfica, numérica, verbal y figurativa.

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA:

La representación simbólica del concepto de límite y de continuidad está directamente relacionada con la representación simbólica de función, lo cual se muestra en los siguientes ejemplos:

(1) $f(x) = x^2 + 3$

(2) $\lim_{x \to 2}(x^2 + 3) = 7$

(3) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) > 0 \; tal \; que \; si \; |x - 2| < \delta \Rightarrow |7 - f(x)| < \epsilon$

(4) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) > 0 \; tal \; que \; si \; |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(2) - f(x)| < \epsilon$

(5) $\forall \; E(7) \; entorno \; de \; 7, \exists E(2) entorno \; de \; 2 \; tal \; que \; \forall x \in E(2) \Rightarrow f(x) \in E(7)$

(6) $\forall \; E(f(2)) \; entorno \; de \; f(2), \exists E(2) entorno \; de \; 2 \; tal \; que \; \forall x \in E(2) \Rightarrow f(x) \in E(f(2))$

En el caso (1) consideramos la función f(x) en su notación simbólica. En el caso (2) queremos expresar que el límite de esa función en x=2 es 7.En el caso (3) se escribe la definición formal de límite y es el que se debe usar para comprobar con rigor que 7 es límite de f(x) en x=2, lo cual de momento no se exigirá al alumnado. En el caso (4) es la definición formal de función continua y es la que se debe usar para comprobar con más rigor que f(x) es continua en x=2. Los casos (5) y (6) son conceptos generales de límite y continuidad que involucran las topologías de conjuntos, no necesariamente numéricos, para los cuales los casos (3) y (4) no tendrían sentido. Para el alumnado del nivel al que va dirigida esta unidad didáctica es conveniente no salir de los casos (1) y (2).

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Esta función no está definida en x=2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} = (\frac{1}{0})$$

Estamos en un caso indeterminado (donde la representación simbólica se manifiesta de manera importante) para lo cual es necesario calcular los límites laterales en x=2 que serán ±∞ según el signo que tenga la función en las cercanías de x=2.

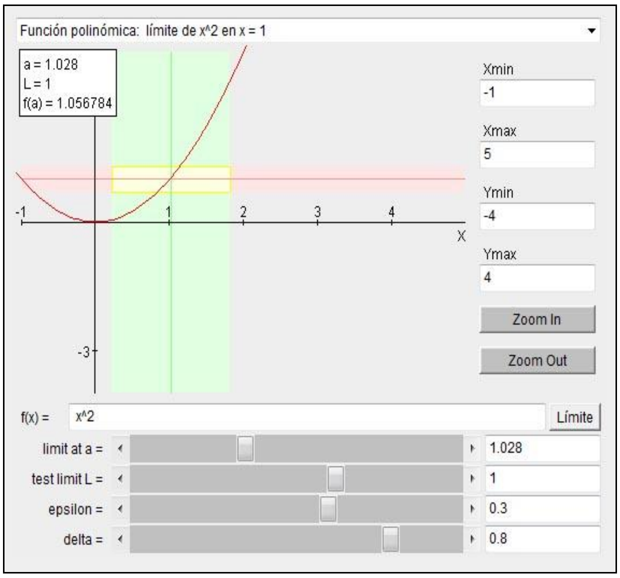
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

Al alumnado, en este caso, les hacemos notar que por la derecha de 2, x-2 se acerca a 0 pero con valores positivos y por la izquierda de 2, x-2 se acerca a 0 pero con valores negativos por lo que es fácil ver si es +∞ o -∞ respectivamente.

REPRESENTACIÓN GRÁFICO-DINÁMICA:

Este sistema de representación se manifiesta principalmente cuando el alumno interactúa con un recurso (en este caso por el grado de abstracción es tecnológico) para estudiar el límite y continuidad de la función en un punto.

Ejemplo: **http://www.aulademate.com/contentid-26.html**

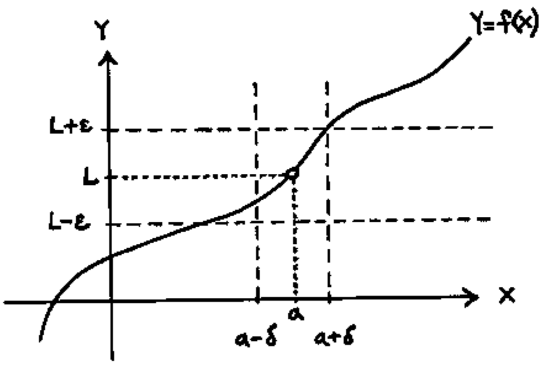


La función es $f(x)= x^2$ .Con este recurso el alumno al ir variando los parámetros con deslizadores puede aproximarse a la idea de límite y continuidad. Puede implementar cualquier función y estudiar asíntotas tanto verticales, horizontales y oblicuas a partir de su representación gráfica. Incluso se le brinda la oportunidad de trabajar con la definición épsilon-delta.

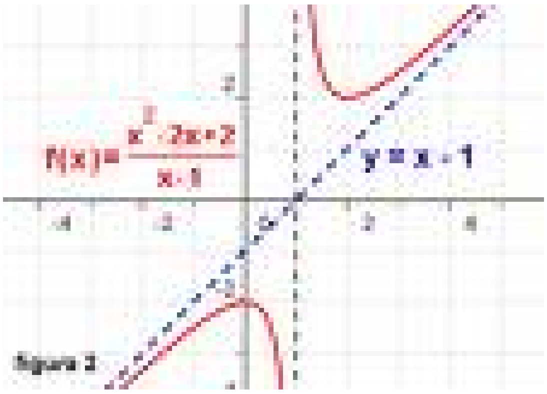
REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Este sistema de representación se manifiesta cuando el alumno reconoce a partir de la gráfica de la función la existencia de límite, la continuidad o el tipo de discontinuidad en un cierto punto así como las asíntotas que tenga la función.

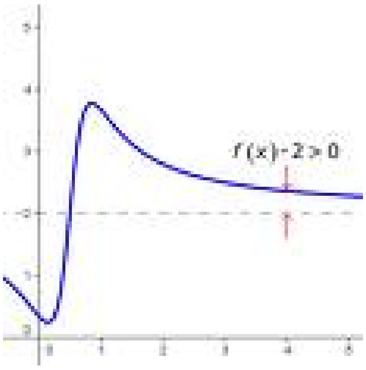
Ejemplos:



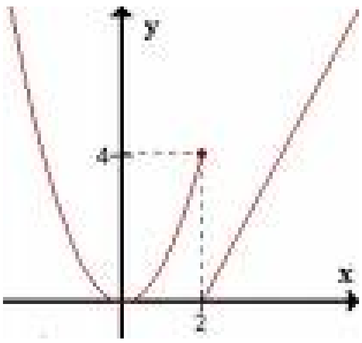
De esta manera se representa gráficamente la definición métrica de límite y de continuidad.



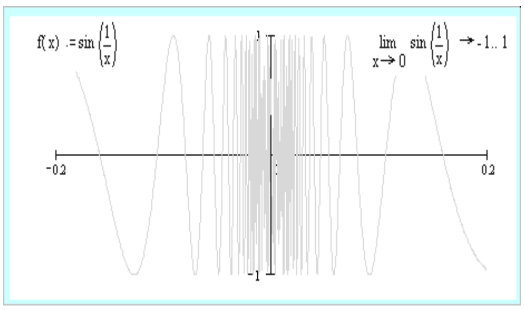
De esta manera se representa gráficamente una asíntota vertical (relacionada con una discontinuidad de salto infinito en x=1) y una asíntota oblicua.



De esta manera se representa gráficamente una asíntota horizontal (expresa que el límite en infinito es 2)



De esta manera se representa gráficamente una discontinuidad de salto finito.



De esta manera se representa gráficamente una discontinuidad esencial donde no existe el límite ni por la izquierda ni por la derecha.

REPRESENTACIÓN NUMÉRICA:

La representación numérica de los conceptos de límite y continuidad se manifiesta en el cálculo de tablas de valores de la función dada tomando valores tan próximos al punto cómo se quiera y estudiando la tendencia de las imágenes correspondientes.

Ejemplo:

x	f(x)=x^2+1
2	5
1,5000	3,25
1,01	2,0201
1,001	2,002001
1,0001	2,00020001
1	2
0,9999	1,99980001
0,999	1,998001
0,99	1,9801
0	1

REPRESENTACIÓN VERBAL:

La representación verbal del concepto de límite y continuidad se manifiesta en la comunicación oral de resultados, como por ejemplo:

"El límite de la función f(x) en x=a es L"

"La función f(x) tiende a L cuando x tiende a x=a"

"La función f(x) tiene una asíntota vertical en x=a"

"La recta y= b es una asíntota horizontal de f(x) en ±∞"

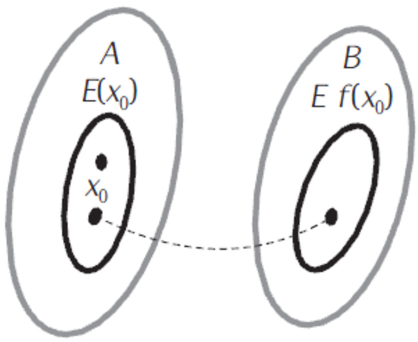
"La recta y= mx + n es una asíntota oblicua de f(x) en ±∞"

"La función f(x) es continua en el punto x=a"

"La función f(x) tiene una discontinuidad (de salto, de salto infinito, evitable) en el punto x=a"

REPRESENTACIÓN FIGURATIVA:

En ocasiones es conveniente utilizar dibujos como por ejemplo:



Con estos diagramas de Venn se representa la definición topológica de continuidad.

1.4 FENOMENOLOGÍA DEL TEMA Y MODELIZACIÓN.

Comienzo esta sección planteando las situaciones y contextos en los que se desarrolla el tema.

ANÁLISIS DE CONTEXTOS:

En este tema se responde siempre a los siguientes problemas:

(1) Dada una lista de k números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ¿Existe un valor tal que a partir de un término la distancia a ese valor fijo es menor que un valor positivo cualquiera dado? ¿Qué se entiende por "tender hacia"?

(2) Dada una función f y una lista de k pares de valores $(x_1,f(x_1)), (x_2,f(x_2)),\ldots(x_k, f(x_k))$ si las primeras componentes tienden a un valor fijo *a*, ¿tienden los respectivos valores por f a otro valor fijo L o se hacen cada vez más grandes? Dado cualquier entorno de L, ¿Existe un entorno reducido de *a* que se aplique por f en él? ¿Son iguales L y f(a)?

(3) Dada una función f y una lista de k pares de valores $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\ldots,(x_k, f(x_k))$ si los primeros se hacen cada vez más grandes, ¿hacia qué valor fijo L tienden los respectivos valores por f? Dado cualquier entorno de L, ¿existe una semirrecta que se aplique por f en dicho entorno?

Algunas de las subestructuras matemáticas que subyacen son:

- Interpolación.
- Rectas tangentes.
- Asíntotas.

ANÁLISIS DE FENÓMENOS

Algunos de los fenómenos donde adquieren significado los conceptos de este tema pueden ser:

- Dinámica de poblaciones, tendencia a lo largo del tiempo.
- Velocidad instantánea de un móvil.
- Problemas de interés compuesto.
- Distribuciones continuas de magnitudes como por ejemplo la temperatura
- Tendencia de la frecuencia relativa del suceso "salir cara" en el lanzamiento de una moneda indefinidamente.
- Fenómenos físicos como el movimiento, el electromagnetismo, la termodinámica se modelan por funciones continuas.
- Fenómenos como la mecánica relativista y la física cuántica se modelan por funciones que presentan singularidades como elemento esencial de discontinuidad.

ANÁLISIS DE SITUACIONES:

Situación pública:

La población de un estado viene dada, en millones de habitantes, por la función:

$P(t) = \dfrac{20(t-1)}{4+(t-1)^2} + 40$ *, donde t es el tiempo en años.*

a) Calcula la población máxima de manera aproximada y el límite cuando t tiende a infinito.

b) Dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Situación personal:

Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:

$v(t) = \dfrac{\sqrt{t+3} - 2}{t-1}$ *, donde t es el tiempo de vaciado en horas y v (t) es el volumen de agua expresado en m^3.*

Averigua hacia donde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1h.

Situación laboral:

Un comerciante vende camisetas a un grupo de estudiantes que están organizando un viaje de estudios. Para ello llama al proveedor para hacer el pedido de las camisetas y éste se las suministra según la función:

$$f(n) = \frac{4.27n + 7.74}{n}$$

Donde n es el número de camisetas vendidas y f(n) el precio en euros por camiseta:

Sabiendo que el comerciante a su vez se las vende a los estudiantes por 8 euros la unidad. ¿Cuál es el beneficio por camiseta según las camisetas vendidas? ¿Cuántas camisetas ha de vender para obtener un beneficio superior a 3'20 euros la unidad? ¿Cuánto cobra el proveedor si el comerciante pide 10.000 unidades?

Situación científica:

La presión atmosférica a nivel del mar es de 1'033 kg/cm^2. A ese valor se le llama atmósfera. Experimentalmente se ha comprobado que por cada kilómetro de altura respecto el nivel del mar, la presión es de 0'9 veces la presión del kilómetro anterior.

a) Escribe una función que dé la presión en función de la altura.

b) Si ascendemos en globo, ¿Qué presión soportaremos cuando nos acercamos a los 5.000 m de altura?

c) Si subimos indefinidamente, ¿hacia qué valor tiende la presión?

d) Queremos ahora descender a una sima que está a 2.000 m de profundidad bajo el nivel del mar, ¿a qué tiende la presión que iremos soportando al bajar?

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA VÍA MODELIZACIÓN.

La modelización de este tema está determinada básicamente pues sólo debemos hallar la función que "modela el fenómeno o problema" ya que si la función ya nos viene dada con la fórmula el alumno sólo tiene que calcular límites e interpretar resultados y no estará ejercitando su competencia de modelizar. Realicemos a modo de ejemplo el último ejercicio que he planteado:

La presión atmosférica a nivel del mar es de 1'033 kg/cm^2. A ese valor se le llama atmósfera. Experimentalmente se ha comprobado que por cada kilómetro de altura respecto el nivel del mar, la presión es de 0'9 veces la presión del kilómetro anterior.

a) Escribe una función que dé la presión en función de la altura.

b) Si ascendemos en globo, ¿Qué presión soportaremos cuando nos acercamos a los 5.000 m de altura?

c) Si subimos indefinidamente, ¿hacia qué valor tiende la presión?

d) Queremos ahora descender a una sima que está a 2.000 m de profundidad bajo el nivel del mar, ¿a qué tiende la presión que iremos soportando al bajar?

Resolución:

La función con la que el alumnado debe trabajar no está dada de manera explícita sino verbal y el alumnado debe obtener la fórmula. Las preguntas que el alumnado frente a este problema debería hacerse son:

¿Para qué valores definiré mi función?

¿Es lineal, polinómica, racional, radical, trigonométrica, exponencial, logarítmica,…?

¿La función que he obtenido se corresponde con la descripción verbal?

Como se menciona "kilómetro anterior" necesariamente la variable debe ser entera, pues si no lo es, ¿qué significa anterior?, por tanto se trata de una sucesión de números reales.

Llamaremos a_n a la presión en kg/cm^2 que existe a n kilómetros sobre el nivel del mar. Son importantes las unidades en este tipo de problemas.

Según la descripción dada en el problema $a_n = 0'9 * a_{n-1}$ *pero sólo conozco $a_0 = 1'033$ kg/cm^2 ¿cómo obtengo a_n en función de a_0 y n?*

Cómo ya conoce las progresiones geométricas pues la expresión recursiva le resultará familiar puede deducir el término general de la sucesión que es $a_n = 0'9^n * 1'033$ kg/cm^2

Pues tenemos entonces la función $f(n) = 0'9^n * 1'033 = \frac{9^n * 1'033}{10^n}$ *donde n es la altura en kilómetros.*

Ahora puede preguntarse ¿Se puede extender a todo $\mathbb{R}$? Pues sí y en este caso necesitamos extenderla.

Podemos ya responder a las preguntas.

b) Como dice "acercarse" consiste en tomar límite y no en sustituir por 5 en la fórmula. Entonces con la calculadora toma valores cercanos a 5 y observa que las imágenes se aproximan a f(5) luego equivale a sustituir n=5 obteniendo 0'610 kg/cm^2

c) Subir indefinidamente se modela como tomar valores cada vez más grandes de n por lo que se pide hallar el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ *de la función y con ayuda de una tabla de valores se comprueba que tiende al valor 0, pues la razón de la progresión geométrica es menor que 1 en valor absoluto.*

d) Ahora si descendemos, esto es, si estamos por debajo del nivel del mar, esto se modela con que la variable n toma valores negativos "por debajo de 0". Así nos pide que ocurrirá en las cercanías de los 2 km de profundidad, es decir, tomamos límite cuando n tiende a -2 obteniendo 1'275 kg/cm^2.

Se puede ver ahora si el modelo responde a lo que se pide.

2. ANÁLISIS COGNITIVO.

2.1 EXPECTATIVAS.

Establezco en primer lugar los siguientes focos de interés para el aprendizaje, sobre los cuales voy a clasificar los objetivos específicos que espero que alcance el alumnado al que va dirigido esta U.D:

- Introducción al concepto de límite de una función.
- Cálculo e interpretación gráfica de límites.
- Relación del concepto de límite con el de continuidad.

Así los objetivos específicos a desarrollar serían:

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

1. Comprender la idea de límite en un punto y en infinito intuyendo el mismo dada una tabla de valores o una gráfica.

2. Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos dada una tabla de valores o una gráfica.

3. Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga el concepto de límite.

CÁLCULO E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LÍMITES.

4. Argumentar la existencia o no del límite de una función y determinarlo cuando sea posible a partir de sus límites laterales o por sustitución directa.

5. Reconocer y resolver indeterminaciones.

6. Relacionar analíticamente y expresar gráficamente límites y asíntotas, encontrando sus ecuaciones.

RELACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE CON EL DE CONTINUIDAD.

7. Reconocer y expresar de manera intuitiva los conceptos de función continua y discontinua en un punto después de argumentar que tiene sentido el estudio de la continuidad en dicho punto.

8. Justificar la continuidad o discontinuidad de una función en un punto mediante los límites laterales, ayudándose de herramientas tecnológicas.

9. Relacionar tipos de discontinuidades de una función con los límites laterales en un punto e identificar los tipos de discontinuidades gráficamente, ayudándose de herramientas tecnológicas.

10. Determinar el dominio de continuidad de una función y esbozar su gráfica conociendo alguna de sus propiedades como asíntotas, máximos, mínimos, etc.

11. Estudiar de manera analítica y gráfica la continuidad de funciones que modelizan diversos fenómenos.

En las siguientes tablas se muestran los objetivos anteriormente especificados agrupados en los distintos focos nombrados al comienzo de esta sección. En las tablas se puede observar también la vinculación de estos objetivos con las competencias PISA, donde:

PR= Pensar y Razonar, AJ= Argumentar y Justificar, C= Comunicar, M= Modelizar,
RP= Resolver Problemas, R= Representar, LS= Lenguaje Simbólico, HT=Herramientas tecnológicas.

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN		2	1	1	1	1	2	0	2
1	Comprender la idea de límite en un punto y en infinito intuyendo el mismo dada una tabla de valores o una gráfica.	X					X		X
2	Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos dada una tabla de valores o una gráfica.	X					X		X
3	Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga el concepto de límite.		X	X	X	X			

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
CÁLCULO E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LÍMITES		2	1	2	0	2	1	2	0
4	Argumentar la existencia o no del límite de una función y determinarlo cuando sea posible a partir de sus límites laterales o por sustitución directa.		X	X		X			
5	Reconocer y resolver indeterminaciones.	X				X		X	
6	Relacionar analíticamente y expresar gráficamente límites y asíntotas, encontrando sus ecuaciones.	X		X			X	X	

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
RELACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE CON EL DE CONTINUIDAD		**3**	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**
7	**Reconocer y expresar de manera intuitiva los conceptos de función continua y discontinua en un punto después de argumentar que tiene sentido el estudio de la continuidad en dicho punto.**	**X**	**X**	**X**					
8	**Justificar la continuidad y discontinuidad en un punto mediante los límites laterales, ayudándose de herramientas tecnológicas.**		**X**	**X**					**X**
9	**Relacionar tipos de discontinuidades con los límites laterales en un punto e identificar los tipos de discontinuidades gráficamente, ayudándose de herramientas tecnológicas.**	**X**					**X**		**X**
10	**Determinar el dominio de continuidad de una función y esbozar su gráfica conociendo alguna de sus propiedades como asíntotas, máximos, mínimos, etc.**	**X**				**X**	**X**		
11	**Estudiar de manera analítica y gráfica la continuidad de funciones que modelizan diversos fenómenos.**				**X**	**X**	**X**	**X**	

La siguiente tabla muestra el balance total de contribución al desarrollo de las competencias PISA:

BALANCE TOTAL	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Introducción al concepto de límite de una función.	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**0**	**2**
Cálculo e interpretación gráfica de límites.	**2**	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**2**	**0**
Relación del concepto de límite con el de continuidad.	**3**	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**
TOTAL	**7**	**4**	**5**	**2**	**5**	**6**	**3**	**4**

Se puede observar en esta última tabla que a las competencias a las que más se contribuye son PR, R, C y RP mientras que al resto se contribuye en menor medida. Esto puede resultar engañoso: no es que se le dé poca importancia a estas competencias, sino que cada foco puede estar más relacionado con unas competencias que con otras, pero esto no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar todas las competencias de la manera más uniforme posible.

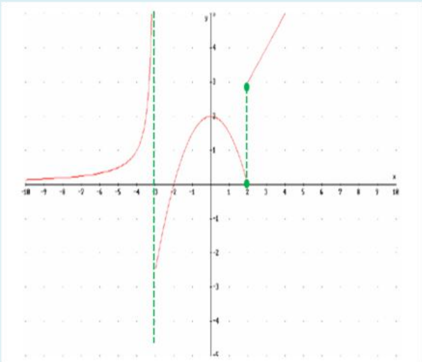
2.2 EJEMPLIFICACIÓN DE TAREAS DESDE LOS OBJETIVOS Y LAS COMPETENCIAS.

Selecciono a continuación dos objetivos que son significativos de esta unidad didáctica:

Objetivo 6: Relacionar y expresar gráficamente límites y asíntotas, encontrando sus ecuaciones.

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de las competencias de "Lenguaje Simbólico" y "Argumentar y justificar" propondría la siguiente tarea:

A la vista de la siguiente gráfica responde a las siguientes cuestiones:



a) ¿En qué puntos la función es continua sin necesidad de hacer un estudio particular en los mismos? Justifica la respuesta.

b) Decide y justifica en qué puntos es necesario hacer un estudio particular de la continuidad y realízalo de manera justificada.

c) Calcula las expresiones algebraicas de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas que existan a partir de la gráfica.

Objetivo 11: Estudiar de manera analítica y gráfica la continuidad de funciones que modelizan diversos fenómenos.

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de las competencias de "Lenguaje Simbólico" y "Representar" propondría la siguiente tarea:

La población de un estado viene dada, en millones de habitantes, por la función:

$P(t) = \frac{20(t-1)}{4+(t-1)^2} + 40$ *, donde t es el tiempo en años.*

a) Calcula la población máxima de manera aproximada y el límite cuando t tiende a infinito.

b) Estudia la continuidad de la función.

c) Dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

2.3 ERRORES Y DIFICULTADES PREVISIBLES EN EL DESARROLLO DE LA U.D.

Creo que es importante tener en cuenta los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya que:

• Primero: Puede ser que un alumno tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que arrastre algún error de cursos o temas anteriores. Pero en ambos casos si se ayuda a que el alumnado tome conciencia de su error, se potenciará su actitud crítica, y se podrá enmendar ese error.

• Segundo: Es posible también que el profesor en su tarea docente haya transmitido por equivocación un resultado falso, o bien, algún concepto de forma que éste no es significativo para el alumnado. En este caso, el error será un indicativo para el profesor de que debe intentar enseñar este resultado o concepto de otra manera, con otro método, otros ejemplos… Esto hace que se depure el proceso de enseñanza.

• Tercero: La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será señal para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido al alumnado.

Paso a enumerar las dificultades y errores más significativos de esta unidad didáctica:

D1. Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto. En particular, proponer como límite el valor de la función en un punto "cercano".

D2. Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales. Considerar a^+ y a^- puntos diferentes.

D3. Errores de tipo algebraico y numérico en el manejo de las funciones cuyo límite se quiere determinar.

D4. Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

D5. Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.

D6. Conflicto con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite.

D7. Dificultad para concebir la idea de límite en el infinito.

D8. Dificultades para comprender que la indeterminación no quiere decir que no se puede obtener el límite.

D9. Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

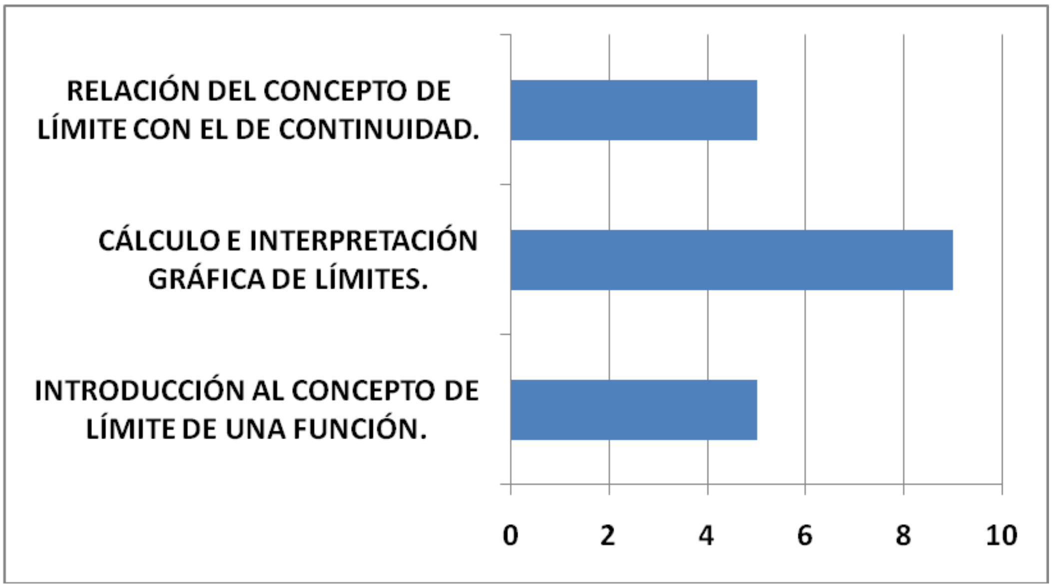
D10. Dificultad para distinguir diferentes tipos de discontinuidades.

D11. Dificultad para encontrar situaciones en las que se apliquen los conceptos de límite y continuidad.

Presento la siguiente tabla de asociación entre dificultades y objetivos:

		Objetivos asociados
D1	**Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto. En particular, proponer como límite el valor de la función en un punto "cercano".**	**1, 2, 4**
D2	**Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales. Considerar a^+ y a^- puntos diferentes.**	**2, 4, 6**
D3	**Errores de tipo algebraico y numérico en el manejo de las funciones cuyo límite se quiere determinar.**	**4, 5**
D4	**Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.**	**1, 2, 4, 5**
D5	**Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.**	**6, 9, 10**
D6	**Conflicto con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite.**	**7, 8, 9**
D7	**Dificultad para concebir la idea de límite en el infinito.**	**1, 2, 6**
D8	**Dificultades para comprender que la indeterminación no quiere decir que no se puede obtener el límite.**	**5**
D9	**Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.**	**6, 9, 10, 11**
D10	**Dificultad para distinguir diferentes tipos de discontinuidades**	**6, 7, 8, 9**
D11	**Dificultad para encontrar y analizar situaciones en las que se apliquen los conceptos de límite y continuidad.**	**3,11**

Para sacar conclusiones representaré en un diagrama de barras el recuento de errores que están ligados a objetivos de los 3 focos fundamentales.



Es fundamental por tanto poner cuidado en que los alumnos manejen las técnicas de cálculo de límites que están en su mayoría ligadas a técnicas algebraicas (la factorización de polinomios y simplificación de fracciones algebraicas) por tanto, convendría repasar nociones de lenguaje algebraico para abordar con eficacia el cálculo de límites.

Presento a continuación ejemplos de tareas para conseguir subsanar algunas de las dificultades:
TAREA 1:

Sea la función $f(x)=x^2- 4$.Responde a las siguientes cuestiones:

a) Realiza la tabla de la función f(x).
b) Escribe valores que se aproximen a x=3 tanto mayores como menores. Escribe sus correspondientes transformados en forma de tabla.
c) ¿Cuál crees que puede ser el límite de f(x) en x=3?Da un valor de x tal que el valor por f diste menos de 0'001 del candidato a límite.
d) Explica a tus compañeros cuál es la forma de calcular límites de polinomios sin necesidad de usar la tabla.

Errores y dificultades asociados:
D1. Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto. En particular, proponer como límite el valor de la función en un punto "cercano".
Esta tarea también se caracteriza por descomponerse en subtareas de progresiva dificultad y secuenciadas. Para superar una dificultad es necesario hacer el concepto o procedimiento significativo para el alumnado, es por eso, por lo que primero se pide realizar la tabla de la

función, después se piden valores tan próximos a un punto como se quiera y sus respectivas imágenes para posteriormente deducir un posible candidato a límite, y controlar la distancia al mismo, por último se le demanda inducir un resultado de manera general para calcular límites de polinomios sin necesidad de depender de la tabla.

TAREA 2:

a) Factorizar los dos siguientes polinomios de la manera que consideres adecuada, $p(x)=x^2+2x-3$ y $q(x)=x^3+7x^2+14x+9$.

b) Simplifica la fracción algebraica q(x)/p(x).

c) Si consideramos la función f(x)=q(x)/p(x) (Sin simplificar). ¿En qué puntos no está definida y por qué? Calcula el límite, si existe, en dichos puntos. Compara la gráfica de f(x) con la de su simplificación asociada.

Errores y dificultades asociados:

D3. Errores de tipo algebraico y numérico en el manejo de las funciones cuyo límite se quiere determinar.

D4. Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

D9. Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

D8. Dificultades para comprender que la indeterminación no quiere decir que no se puede obtener el límite.

La principal característica de esta tarea es que también está subdividida en pasos para que el alumnado pueda realizar el último apartado a partir de los otros dos y por tanto permite superar las dificultades progresivamente.

3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.

3.1 GRADOS DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS.

Presento para cada grado de complejidad un ejemplo de tarea:

Reproducción:

Sea la función f(x)=x^2- 4.Responde a las siguientes cuestiones:

a) Realiza la tabla de la función f(x).
b) Escribe valores que se aproximen a x=3 tanto mayores como menores. Escribe sus correspondientes transformados en forma de tabla.
c) ¿Cuál crees que puede ser el límite de f(x) en x=3?Da un valor de x tal que el valor por f diste menos de 0'001 del candidato a límite.
d) Explica a tus compañeros cuál es la forma de calcular límites de polinomios sin necesidad de usar la tabla.

Conexión:

Sean p(x)=x^2+2x-3 y q(x)=x^3+7x^2+14x+9:
Si consideramos la función f(x)=q(x)/p(x) ¿En qué puntos no está definida y por qué? Calcula el límite, si existe, en dichos puntos. Compara la gráfica de f(x) con la de su simplificación asociada.

Reflexión:

La población de un estado viene dada, en millones de habitantes, por la función:
$P(t) = \frac{20(t-1)}{4+(t-1)^2} + 40$ *, donde t es el tiempo en años.*

a) Calcula la población máxima de manera aproximada y el límite cuando t tiende a infinito.

b) Dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Criterio utilizado en la clasificación:

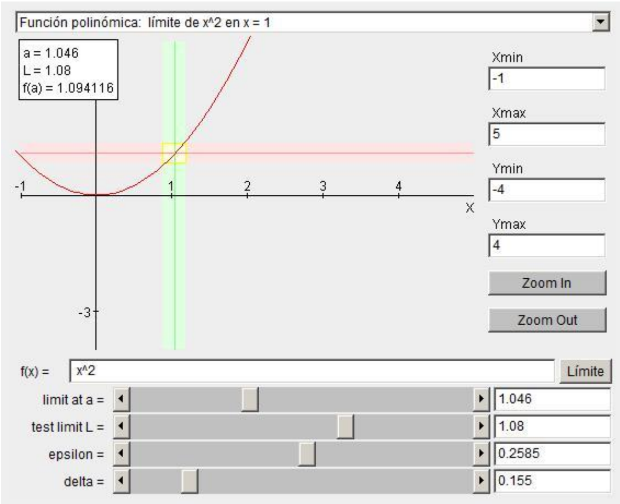
Para reproducción en este tema el criterio utilizado es que el alumnado, bien con su conocimiento previo, o mediante aplicación directa de un concepto o procedimiento obtiene el resultado.
Para conexión, el criterio es que el alumnado tiene que decidir ante una variedad de técnicas de cálculo de límites y para ello tiene que analizar el tipo de función.

Y para reflexión he considerado problemas relacionados con fenómenos donde a veces la función no está descrita mediante una fórmula y si lo está es necesaria interpretar lo que se pide, e incluso se puede pedir algo que el alumnado no relacionaría con límites de manera automática (Calcular el máximo o mínimo de una función sin tener la noción de derivada, exige aproximarse de manera sucesiva a la abscisa que da el extremo).

3.2 RECURSOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS.

Los materiales y recursos didácticos específicos que utilizaría en esta unidad didáctica serían:

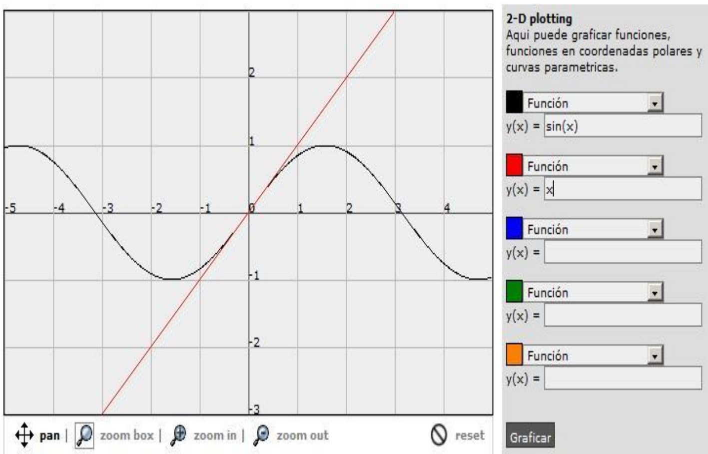
1. CARACTERIZACIÓN ÉPSILON-DELTA (http://www.aulademate.com/contentid-26.html)



Este recurso permite a parte de representar funciones analizar la caracterización épsilon-delta que tantas dificultades supone al alumnado.

Me puede útil para plantear actividades de ampliación para el alumnado que quiera y pueda.

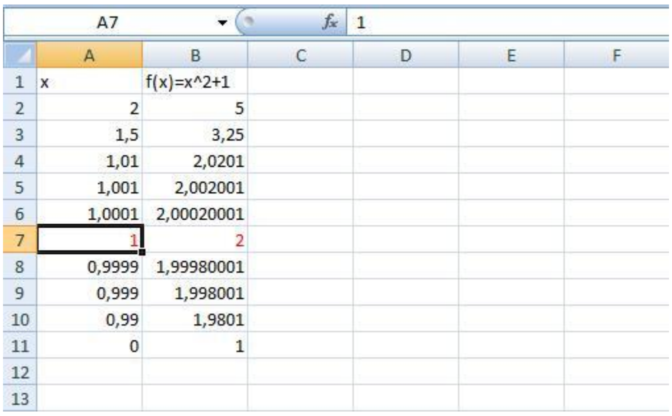
2. GRAFICADOR DE FUNCIONES (http://fooplot.com/)



Este recurso permite representar varias funciones y está provisto de zoom por lo que es perfecto para mostrar a los alumnos cuándo dos funciones son equivalentes en un punto.

El programa GEOGEBRA se puede utilizar con la misma función que éste.

3. HOJA DE CÁLCULO (Excel)



A7 | f_x | 1

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)=x^2+1				
2	2	5				
3	1,5	3,25				
4	1,01	2,0201				
5	1,001	2,002001				
6	1,0001	2,00020001				
7	1	2				
8	0,9999	1,99980001				
9	0,999	1,998001				
10	0,99	1,9801				
11	0	1				
12						
13						

Este recurso permite tabular valores de la función dada y es muy útil para estudiar de manera intuitiva el concepto de límite y continuidad en un punto. Puede ser un apoyo importante para el alumnado para entender la idea de aproximación. Como ampliación se puede utilizar para trabajar numéricamente con la caracterización épsilon-delta.

Otros recursos:

También se usarán recursos convencionales como pizarra, libro de texto, calculadora gráfica o convencional, apuntes propios y relaciones de ejercicios.

4. DESARROLLO DE LA UD: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

4.1. CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

CONTENIDOS ESPECÍFICOS DENTRO DEL MARCO DEL BACHILLERATO.

Esta unidad didáctica está dirigida para el nivel de 1º de Bachillerato de la rama de ciencias de la naturaleza y de la salud.

Según la ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato en el ámbito español los contenidos de mi tema se engloban en el bloque de Análisis bajo el título “Aproximación al concepto de límite de una función en un punto. Tendencia y continuidad. Estudio de discontinuidades”, no haciéndose mención explícita de conceptos, procedimientos y actitudes.

Según la ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía, no se hace mención expresa de los conceptos, procedimientos y actitudes y da sólo 4 grandes bloques temáticos para el bachillerato.

DESCRIPCIÓN DE LOS CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA U.D.

De entre los términos que aparecen en el tema que estoy tratando, en esta U.D. les doy especial importancia a los siguientes:

- **Límite.**
- **Límite lateral.**
- **Tender a un número.**
- **Tender a infinito.**
- **Indeterminación.**
- **Asíntota.**
- **Continuidad, discontinuidad.**

Ahora describo los conceptos que trataré:

- **Límite de una función en un punto.**
- **Límite de una función en infinito.**
- **Límites laterales.**
- **Asíntota horizontal.**
- **Asíntota vertical.**
- **Asíntota oblicua.**
- **Función continua.**
- **Continuidad en un punto.**
- **Discontinuidad en un punto.**
- **Tipos de discontinuidad.**

Éstas son las destrezas a desarrollar:

- **Cálculo de límite de una función en un punto por sustitución directa o mediante representación gráfica.**
- **Calcular límites mediante las propiedades del límite respecto las operaciones con funciones a saber suma, producto y composición.**
- **Cálculo de límites laterales en un punto con ayuda de una tabla de valores.**
- **Reconocimiento de la continuidad de una función polinómica. Representación gráfica.**

- **Reconocimiento de la discontinuidad de una función en un punto por medio de la comparación de los límites laterales siempre que estos existan.**
- **Operaciones con funciones continuas.**

En cuanto a los tipos de razonamiento, que se verán involucrados en esta U.D. se pueden considerar:

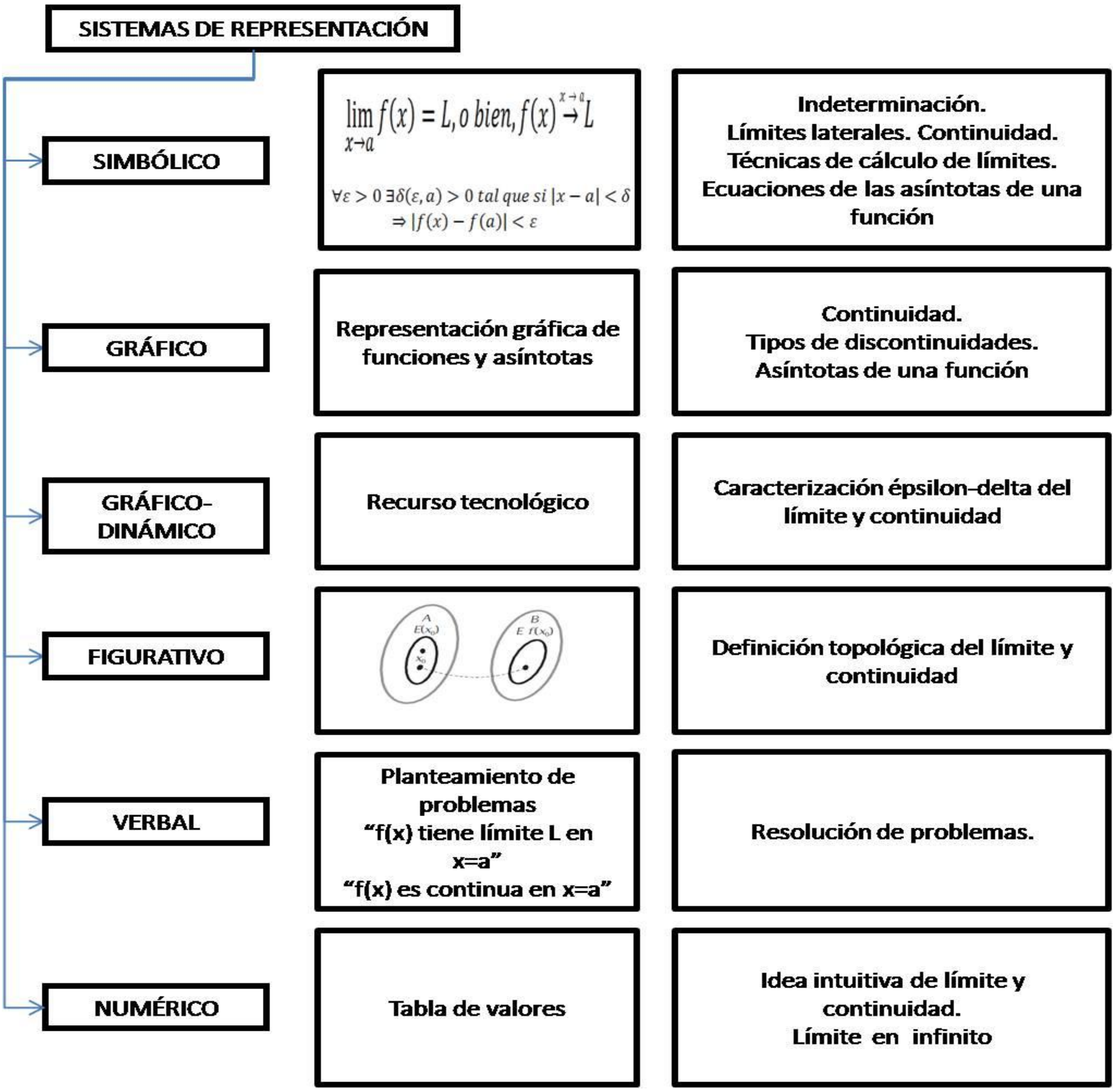
- **Deductivo: propiedades de las operaciones con límites y funciones continuas.**
- **Inductivo: regularidades en el cálculo de límites.**
- **Analógico: Establecer relaciones para resolución de indeterminaciones.**
- **Figurativo: Uso de tablas y representaciones gráficas.**

Por último las estrategias que se deben trabajar serían:

- **Reconocimiento de indeterminaciones en el cálculo del límite de una función.**
- **Aplicación de técnicas de resolución de indeterminaciones para funciones.**
- **Cálculo del límite de una función en $+\infty$ y $-\infty$. Esbozo de asíntotas horizontales.**
- **Cálculo de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y esbozo de las mismas.**
- **Reconocimiento de una discontinuidad esencial de una función en un punto.**
- **Técnicas de resolución de problemas donde estén involucrados los conceptos del límite y continuidad.**

RELACIÓN ENTRE CONTENIDOS Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

En el siguiente gráfico muestro la relación entre contenidos y los sistemas de representación que se desarrollaron en la sección 1.3.



He seleccionado estos contenidos de acuerdo al nivel de competencia curricular del alumnado de 1º de Bachillerato y a su nivel de abstracción, dado que han tenido un acercamiento intuitivo al concepto de límite de una sucesión y continuidad de una función en 4º ESO por lo que en este curso se hará más hincapié en las técnicas de cálculo de límites y asíntotas, así como en el estudio de la continuidad a partir del límite. Los límites de sucesiones no los consideraré de manera explícita, pues serán casos particulares de límites en infinito.

4.2. SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS DE LA U.D. GESTIÓN DEL AULA.

Descripción de la organización de las tareas de la U.D:

Las tareas se realizarán en 8 sesiones de clase que en orden de ejecución serían:

1. Funciones.
2. Límite de una función en un punto (de manera intuitiva).
3. Límites en infinito (de manera intuitiva).
4. Límites infinitos (tanto en un punto como en infinito).
5. Técnicas de cálculo de límites. Límites determinados e indeterminados.
6. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
7. Estudio de la continuidad de una función (de manera intuitiva y rigurosa)
8. Sesión de evaluación.

Tipos de tareas:

Se incluirán tareas de revisión de conocimientos previos sobre funciones que deberían tener los alumnos para abordar este tema, tales como determinar el dominio y recorrido, intervalos de monotonía; extremos relativos y absolutos sobre las gráficas, así como de representación gráfica de las funciones que se han visto en el curso anterior.

También se utilizarán tareas de construcción de significados, como por ejemplo, donde se incluyan tablas numéricas para enseñar la noción intuitiva de límite o de aplicación directa de técnicas algebraicas de cálculo de límites.

Entre las tareas de ejercitación, destaco las de suministrar una gran variedad de funciones para que se reconozca el algoritmo a seguir para calcular límites.

Entre las tareas de síntesis destaco por ejemplo, presentar al alumno una función definida a trozos para que realice el estudio de continuidad, detecte y calcule las asíntotas y finalmente represente gráficamente la función.

Por último, veo necesaria la propuesta de problemas para que el alumno contextualice todos los conocimientos que va aprendiendo a lo largo de esta unidad.

<u>Ejemplos de tareas significativas y su función en el desarrollo de la U.D.:</u>

EJEMPLO 1:

Dada la siguiente función definida a trozos responde a las siguientes cuestiones:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+4}{x+1} & si\ x<-1\\ x+7 & si-1\leq x<0\\ x^2+2x-1 & si\ \ 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x>1\end{cases}$$

a) Determina los puntos donde es necesario hacer un estudio particular de la continuidad. ¿Cómo es la función en los demás puntos?

b) Para cada uno de esos puntos estudia la continuidad y determina, en caso de discontinuidad, qué tipo de discontinuidad existe.

c) Calcula todos los tipos de asíntotas que conozcas de la función.

d) Esboza la función gráficamente.

- Función de la tarea en el desarrollo de la U.D.

  Como tarea de evaluación, pues engloba gran parte de los conocimientos que ha aprendido durante la unidad y la información que suministra la tarea obliga al alumno a recordar todo los aprendizajes que se han visto durante las sesiones, es decir, hay ausencia de “ayudas” y es él alumno el que debe decidir cómo abordar el ejercicio.

EJEMPLO 2:

Dada la función $f(x)=1/x$, estudia su comportamiento en x=0 respondiendo a las siguientes cuestiones:

a) ¿Recuerdas qué tipo de función es y cómo se representa?

b) Construye la tabla de valores de esa función para valores distintos de x=0.Enumera varios puntos cercanos a 0 por debajo y por arriba. Calcula sus valores por f. ¿Qué observas? ¿Es el mismo comportamiento por la izquierda que por la derecha?

- Función de la tarea en el desarrollo de la U.D.

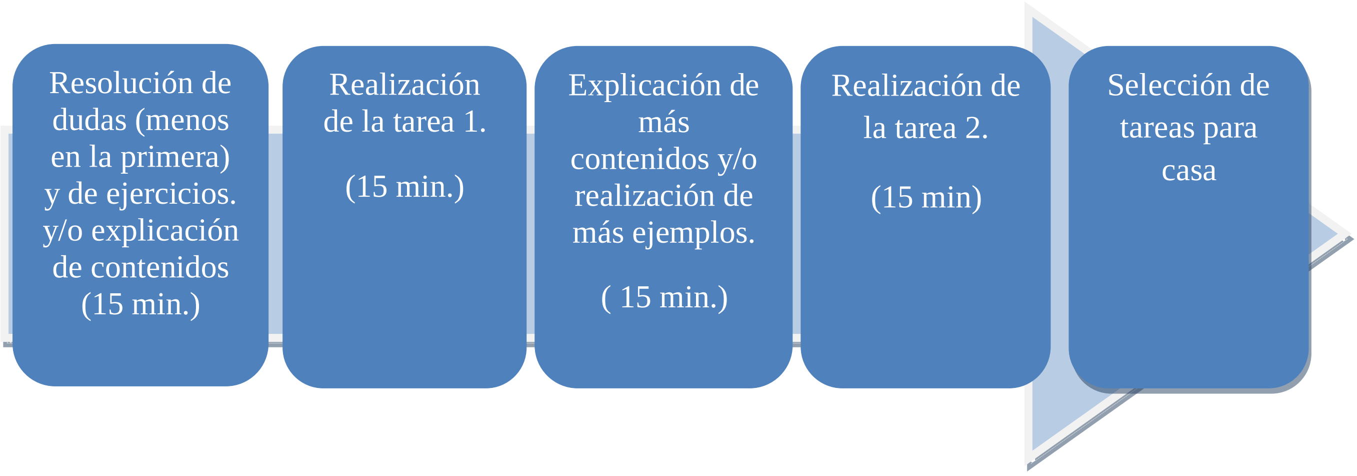
  Como tarea de construcción de significados, pues esta tarea me permite introducir el concepto de asíntota vertical en un punto a partir de un caso particular, pues la definición de asíntota vertical se ajusta perfectamente a esta función y le permite al alumno generalizar.

4.3. DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE TAREAS DE LA U.D.

Desarrollaré ahora 7 sesiones de trabajo en clase sobre el tema.

<u>Distribución temporal general de cada sesión:</u>

Esta distribución de tiempos será flexible según las necesidades del alumnado, pero para fijar criterios, ésta será la dinámica de todas las sesiones, desde la primera hasta la séptima.



SESIÓN 1: <u>FUNCIONES</u>

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

<u>Conceptos básicos:</u> Concepto de función. Dominio y recorrido. Operaciones con funciones. Función inversa. Representación gráfica de funciones.

<u>Contextos y situaciones:</u> Científico y laboral.

<u>Sistemas de representación utilizados:</u> Verbal, simbólico, gráfico y numérico.

<u>Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:</u>

- Reconocer las distintas formas de definir una función.
- Distinguir si una correspondencia dada entre dos conjuntos es una función o no.
- Reconocer el dominio y recorrido de una función y de las distintas operaciones que se pueden realizar con ellas.
- Calcular la función inversa. Hallar el dominio y recorrido de la misma.

- Manejar el procedimiento de representación gráfica de una función y de su inversa, en caso de que ésta exista.

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Esta sesión es de repaso de contenidos del curso anterior, por lo que los objetivos y contenidos que se impartan no los he considerado específicos de esta sesión. Esta sesión se destinará a recordar a los alumnos los conceptos básicos para abordar las siguientes sesiones.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la primera. Los alumnos han tenido contacto con las funciones en cursos anteriores por lo que esta sesión será de revisión de conocimientos previos y servirá de introducción para la siguiente sesión "Límite de una función en un punto".

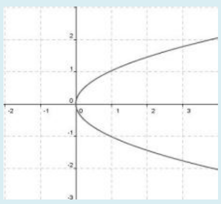
3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor después de recordar el concepto de función y sus elementos, así como las formas que existen de definir una función y la representación gráfica, propondrá al alumno tareas del tipo siguiente:

Decide justificadamente cuáles de las siguientes relaciones son funciones, en cuyo caso halla su dominio:
a) A cada alumno de a clase se le asocia su edad.
b) A cada profesor se le asocia los alumnos de su tutoría.
c) A cada número real positivo se le asocia sus raíces cuadradas.
d) A cada número real, le asociamos su doble más 5.

e) 

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es individual, aunque después se pueden discutir los diferentes puntos de vista que surjan entre los alumnos.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Al realizar esta actividad el profesor comprueba si los alumnos distinguen entre lo que es una función y lo que no es y además si reconocen el dominio de las mismas.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Después de recordar las operaciones que se pueden realizar con funciones, explicará el concepto de función recíproca de una función y cómo se representa gráficamente. Para asimilar el contenido el alumno realizará tareas del tipo:

Dadas las funciones f(x)= 5x+3 y g(x)=$\frac{1}{x-7}$ *responde a las siguientes cuestiones:*

a) Calcula los dominios de f(x), g(x), 2f(x), f(x).g(x), f(x)/g(x).
b) Representa la gráfica de f(x). ¿Cuál sería la de $f^{-1}(x)$ *sin calcularla previamente? Calcula la fórmula de* $f^{-1}(x)$ *a continuación así como su dominio y recorrido.*

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo será individual aunque se podrán discutir los diferentes puntos de vista del alumnado. El profesor intentará en la medida de lo posible no intervenir en la realización de los mismos para comprobar si el alumnado maneja el contenido o no.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende comprobar que al menos los procedimientos básicos de trabajo con funciones han sido asimilados por el alumnado.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Esta tarea se realizará en casa y será un problema para que el alumno aplique todo lo que ha aprendido durante la clase, sea el siguiente un ejemplo:

Un aparcamiento público tiene una tarifa de 3 euros la primera hora y 2 euros por cada hora o fracción adicional. De entre las formas estudiadas, elige la más conveniente para representar la función que da el precio del estacionamiento durante las seis posibles horas que puede estar aparcado un coche.

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Descripción sobre la gestión del aula: Se entregará en la siguiente sesión.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende que los alumnos apliquen todos los aprendizajes a la vida cotidiana.

SESIÓN 2: LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo del límite de una función en un punto con ayuda de una tabla de valores o de la gráfica.

Contextos y situaciones: Científico

Sistemas de representación utilizados: gráfico y numérico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Comprender la idea de límite en un punto intuyendo el mismo dada una tabla de valores o una gráfica. (PR,AJ, R,HT)
- Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos dada una tabla de valores o una gráfica. (PR, R)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Una vez recordados los conocimientos previos del tema, esta sesión consistirá en acercar de manera intuitiva a los alumnos al concepto de límite y de límite lateral mediante realización de ejemplos concretos de funciones y análisis de gráficas.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la segunda. Los alumnos han recordado las nociones básicas sobre funciones que le permitirán abordar esta sesión y, con relación a la siguiente, los alumnos estarán preparados para abordar el comportamiento en el infinito, de manera intuitiva siempre.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor planteará ejemplos en pizarra para que los alumnos realicen las respectivas tablas de valores y calculen de manera intuitiva límites en puntos dados. Se realizará una tarea de este tipo:

Dadas las funciones $f(x)=x^2+3$, $g(x)=sen\ (1/x)$. Calcular las respectivas tabla de valores y estimar el límite y en caso de que éste no exista, indaga una razón.

Material o recurso necesario: Si se dispusiera del aula de ordenadores, la actividad se podría realizar con una hoja de cálculo.

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es en parejas de dos alumnos. El profesor atenderá cualquier dificultad que surja a los alumnos.

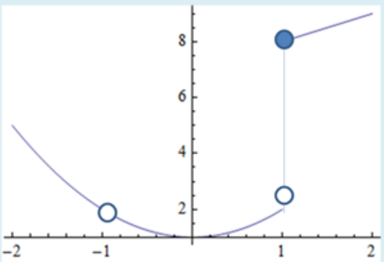
Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Esta actividad permite al profesor promover en el alumnado el sentido intuitivo de aproximación y crítico para justificar la no existencia de límite.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor presentará al alumnado una gráfica de una función no necesariamente desconocida y planteará cuestiones al alumnado sobre la misma. Una actividad tipo sería la siguiente:

A la vista de la siguiente gráfica responde a las siguientes cuestiones:



a) Calcula f (-1), f (1) y f (0).

b) Calcula si existe $\lim_{x\to -1} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0} f(x)$

c) Calcula $\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo de manera individual, el profesor se limitará a resolver las dudas que surjan al alumnado.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Las intenciones del profesor con esta actividad es que los alumnos interpreten gráficamente los límites laterales de manera intuitiva al principio pues después se hará más en profundidad.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

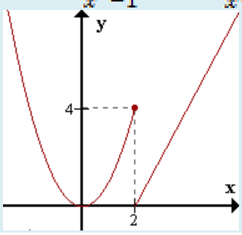
Una tarea de ejercitación para casa relacionada con el contenido de esta sesión será:

Responde a las siguientes preguntas:

a) Construye una tabla de valores adecuada para calcular los siguientes límites:

$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2-2}$

b)



¿Cuál es la imagen de x=2?

Calcula el límite en x=2, en caso de no existir, expresa los límites laterales en x=2.

Material o recurso necesario: Ninguno específico, uso de una hoja de cálculo si es preciso.

Descripción sobre la gestión del aula: Se entregará en la siguiente sesión.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende que los alumnos consoliden los aprendizajes mínimos de esta sesión.

SESIÓN 3: LÍMITES EN INFINITO.

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Límite de una función en infinito. Cálculo del límite de una función en infinito mediante una tabla de valores o de la gráfica.

Contextos y situaciones: Científico y laboral.

Sistemas de representación utilizados: numérico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Comprender la idea de límite en infinito intuyendo el mismo dada una tabla de valores o una gráfica. (PR,AJ, R,HT)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

En esta sesión se pretende que el alumno se familiarice con la tendencia de la función cuando la variable independiente toma valores cada vez más grandes y cada vez más pequeños, siguiendo la misma metodología que en la sesión anterior.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la tercera. No he querido introducir el concepto de límite en infinito en la sesión anterior dado que los comportamientos en un punto y en infinito se enfocan de manera diferente, sin embargo, el procedimiento intuitivo a seguir es análogo. Esto me permitirá en la siguiente sesión estudiar los límites infinitos haciendo hincapié en el caso de límite en un punto.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Después de explicar lo que significa tender a infinito, los alumnos pueden analizar varias funciones construyendo las respectivas tablas de valores. Se propondrían tareas del tipo:

Calcula mediante una tabla de valores los siguientes límites:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{2x^3-5x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+4}$ *Nota: Realiza los mismos ejemplos para -∞.*

Material o recurso necesario: Ninguno específico (La calculadora o una hoja de cálculo).

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es individual.

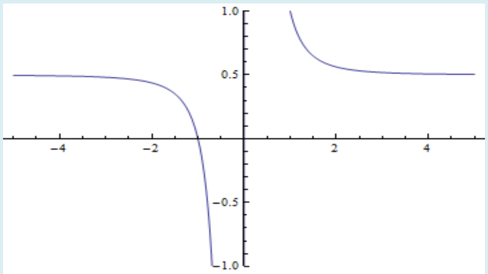
Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Al realizar esta actividad el profesor comprueba si los alumnos distinguen entre lo que es una función y lo que no es y además si reconocen el dominio de las mismas.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Se mostrarán al alumno varias gráficas de funciones no necesariamente conocidas para que intuyan gráficamente los límites en infinito, como muestra la tarea siguiente:

A la vista de la gráfica siguiente responde a las siguientes cuestiones:



a) ¿Te resulta conocida esta función?
b) Calcula los límites en +∞ y -∞. ¿Son iguales?
c) ¿Crees que f se acercará al límite con valores mayores que él o menores?

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo será en parejas de dos sobre todo para el apartado c). El profesor atenderá las dificultades que surjan.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende comprobar que los alumnos son capaces de interpretar la gráfica y a su vez de observar las ideas intuitivas sobre asíntota horizontal, aunque no se vea expresamente el concepto de asíntota.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Esta tarea se realizará en casa y será un problema para que el alumno aplique todo lo que ha aprendido durante la clase, sea el siguiente un ejemplo:

Un comerciante vende camisetas a un grupo de estudiantes que están organizando un viaje de estudios. Para ello llama al proveedor para hacer el pedido de las camisetas y éste se las suministra según la función:

$$f(n) = \frac{4.27n + 7.74}{n}$$

Donde n es el número de camisetas vendidas y f(n) el precio en euros por camiseta. Sabiendo que el comerciante a su vez se las vende a los estudiantes por 8 euros la unidad. ¿Cuál es el beneficio por camiseta según las camisetas vendidas? ¿Cuántas camisetas ha de vender para obtener un beneficio superior a 3'20 euros la unidad? ¿Cuánto cobra el proveedor si el comerciante pide 10.000 unidades?

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Descripción sobre la gestión del aula: Se entregará en la siguiente sesión.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende que los alumnos apliquen todos los aprendizajes a situaciones de la vida cotidiana.

SESIÓN 4: LÍMITES INFINITOS.

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Límites laterales. Límites infinitos en un punto y en infinito. Noción intuitiva de asíntota vertical. Reconocimiento de límites infinitos numérica y gráficamente.

Contextos y situaciones: Científico

Sistemas de representación utilizados: numérico, simbólico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Comprender la idea de límite infinito en un punto y en infinito intuyéndolo mediante una tabla de valores o una gráfica. (R, PR).
- Intuir de manera aproximada la noción de asíntota vertical gráficamente (PR,R)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Como se ha hecho referencia en la sesión anterior, en esta sesión se verán ejemplos donde la función se hace muy grande o muy pequeña en las cercanías de un punto. No se pretende introducir formalmente el concepto de asíntota vertical sólo mostrárselo de manera intuitiva.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la cuarta. No he introducido los límites infinitos en las sesiones anteriores porque son casos particulares que requieren un estudio detenido, pues es necesario analizar cada uno de los límites laterales por separado, ya que habrá ocasiones en los que los límites laterales no sean iguales, o bien uno de ellos sea finito y el otro no.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor planteará ejemplos variados de límites infinitos, haciendo hincapié en que estudien los límites laterales por separado, realizando la tabla de valores correspondiente. Sea ésta una posible tarea:

Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{5-x}{x}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{5-x}{x}$ *¿Son iguales o diferentes?*

$\lim_{x\to 0^+} \frac{5-x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{5-x}{x^2}$ *¿Y en este caso? ¿Existe límite en x=0?*

Material o recurso necesario: Hoja de cálculo (si se dispone de ordenadores) o calculadora.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual y dirigido por el profesor.

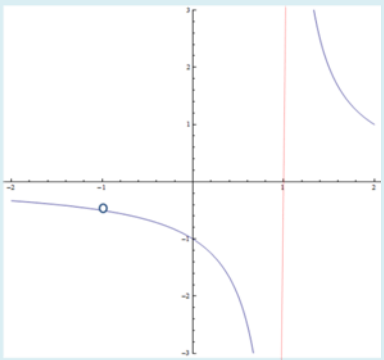
Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor tiene la intención de que observen los alumnos que los límites laterales no son siempre iguales, pues es necesario hacer un estudio particular.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor mostrará varias gráficas de funciones no necesariamente conocidas y les pedirá a los alumnos que reconozcan los puntos donde existe límite infinito. Sea el siguiente un posible enunciado.

Dada la siguiente gráfica. Señala los puntos donde existe límite infinito y calcula sus límites laterales.



Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Los alumnos trabajarán de manera individual. Si existieran diferentes opiniones entre ellos, el profesor moderará sus discusiones.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad:
El profesor pretende que los alumnos observen de manera gráfica cómo se aproxima la gráfica a una recta vertical y que asocien ese hecho a la existencia de límite infinito en un punto.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:
El profesor planteará una tarea que vaya recopilando todo lo visto hasta el momento:

Dadas las funciones $f(x)=x^2+5$ y $g(x)=(x^4+1)/(x-1)$. Realiza un estudio de las mismas cómo se ha realizado en las sesiones anteriores, es decir, represéntalas gráficamente con el graficador de funciones, para $x=1$ y $x=-1$ construye las respectivas tablas de valores y calcula, si existen, los límites en esos puntos.

Material o recurso necesario: Un graficador de funciones o Geogebra, así como la hoja de cálculo.

Descripción sobre la gestión del aula: Se entregará al día siguiente al profesor.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Que los alumnos practiquen los contenidos impartidos en estas 4 primeras sesiones, pues en las siguientes se trabajarán con técnicas de cálculo que sustituirán al procedimiento de la tabla de valores.

SESIÓN 5: TÉCNICA DE CÁLCULO DE LÍMITES.LÍMITES DETERMINADOS E INDETERMINADOS.

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Concepto de indeterminación. Tipos de indeterminaciones. Funciones equivalentes en un punto. Reconocimiento y resolución de indeterminaciones.

Contextos y situaciones: Científico.

Sistemas de representación utilizados: Simbólico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Reconocer y resolver indeterminaciones.(PR, R, LS)

- Resolver límites mediante sustitución directa. (LS)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:
En esta sesión se enseñarán técnica de cálculo de límites generalizando el procedimiento de aproximación intuitiva numérica, al resolver los límites de manera más rápida utilizando para ello las propiedades de los límites respecto las operaciones usuales de funciones.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.
Esta sesión es la quinta. Todas las anteriores han sido de aproximación intuitiva al concepto de límite. Para las siguientes los alumnos usarán las "herramientas" que aprendan en esta sesión.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:
El profesor enlazará los aprendizajes anteriores con los nuevos mediante tareas en las que el alumnos intuya, por ejemplo, el procedimiento de cálculo de límite de un polinomio en un punto mediante sustitución directa, sin embargo, debe hacer hincapié en que la imagen de una función en un punto no es necesariamente igual al límite en dicho punto.

Sea la función $f(x)=x^2- 4$.Responde a las siguientes cuestiones:
a) Realiza la tabla de la función f(x).
b) Escribe valores que se aproximen a x=3 tanto mayores como menores. Escribe sus correspondientes transformados en forma de tabla.
c) ¿Cuál crees que puede ser el límite de f(x) en x=3? Da un valor de x tal que el valor por f diste menos de 0'001 del candidato a límite.
d) Explica a tus compañeros cuál es la forma de calcular límites de polinomios sin necesidad de usar la tabla.

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es individual, aunque el profesor podrá pedir voluntarios para que expongan sus conclusiones del apartado d).

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Al realizar esta actividad el profesor comprueba si los alumnos llevan al día la asignatura revisando los contenidos anteriores y además, le sirve para valorar su capacidad de generalizar procedimientos.

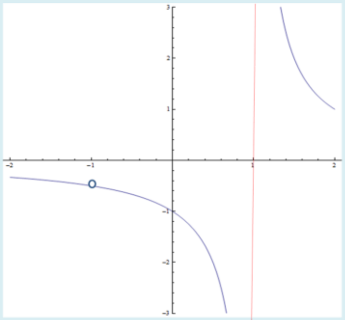
Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor explicará los procedimientos de resolución de las indeterminaciones que aparecen en funciones polinómicas, racionales y radicales, tanto en un punto como en infinito, dando la interpretación gráfica cuando convenga. Una tarea que podría plantear podría ser:

Sean $p(x)=x^2+2x-3$ *y* $q(x)=x^3+7x^2+14x+9$*:*

Si consideramos la función f(x)=q(x)/p(x) ¿En qué puntos no está definida y por qué? Calcula el límite, si existe, en dichos puntos. Calcula los límites en infinito. Compara la gráfica de f(x) con la de su simplificación asociada.



¿Qué tipo de indeterminación tendría una supuesta función racional en x=-1?

Material o recurso necesario: Un graficador de funciones o Geogebra en su caso.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual del alumno aunque el profesor podrá sacar voluntarios para que expliquen la relación que observan entre la gráfica de una función y un tipo de indeterminación de los estudiados.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad:

Que los alumnos puedan a partir de la gráfica también intuir qué tipo de indeterminación da lugar a dicha gráfica, sin embargo, debería advertir que una indeterminación (0/0) puede dar lugar a una del tipo (k/0), luego en la tarea anterior, no podría decidir para x=1. Podría también informar a los alumnos de que 0*∞, ∞/∞ son equivalentes a (0/0).

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Una tarea de ejercitación para casa sería la siguiente:

a) Calcula los siguientes límites con las técnicas que creas convenientes:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\quad \lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{x+3}\quad \lim_{x\to3}\frac{x-3}{1-\sqrt{4-x}}\quad \lim_{x\to-3}\frac{x^2+1}{x+3}\quad \lim_{x\to4}\frac{2x^2-11x+12}{x-4}$$

$$\lim_{x\to0}\left(f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}} & si\ -1\leq x<0\\ x^2+1 & si\ x\geq 0\end{cases}\right)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+5}\quad \lim_{x\to+\infty}x^2-5x+7$$

b) Representa con Geogebra las siguientes funciones f(x)=sen(5x) y g(x)=x. ¿Qué crees que vale entonces el $\lim_{x\to0}\frac{sen(5x)}{x}$ *?*

Material o recurso necesario: Geogebra o el graficador de funciones en su defecto.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual para entregar al día siguiente.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende que los alumnos adquieran soltura con los procedimientos algebraicos de resolución de indeterminaciones y que usen la tabla de valores a modo de orientación sobre cuál es el candidato a límite.

SESIÓN 6: ASÍNTOTAS VERTICALES, HORIZONTALES Y OBLICUAS.

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Cálculo y representación gráfica de asíntotas.

Contextos y situaciones: Científico.

Sistemas de representación utilizados: Simbólico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Relacionar analíticamente y expresar gráficamente límites y asíntotas, encontrando sus ecuaciones. (PR, R, LS)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

En esta sesión se pretende formalizar la noción de asíntotas como rectas a las que se aproxima la función en “puntos del infinito”, para lo cual se espera que el alumno se familiarice con las ecuaciones de las mismas así como su representación gráfica. Se realizarán ejemplos variados.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la sexta. En sesiones anteriores el alumno ha tenido contacto, al menos, gráfica y numéricamente con las asíntotas verticales y horizontales, pero sin formalizar dicho contacto. Esta sesión se considerará como "cierre de bloque" y preparará al alumno para abordar de manera algorítmica el estudio de la continuidad y discontinuidad de una función, que se impartirá en la última sesión.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Tras presentar formalmente los conceptos de asíntota vertical y horizontal se realizarán tareas tanto de manera simbólica (dada la fórmula hallar las asíntotas) como de manera gráfica (identificar las asíntotas a partir de la gráfica de una función no necesariamente conocida). Sea ésta una posible tarea:

Calcula las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones y esboza la posición relativa de la curva respecto de las asíntotas:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Realización de la tarea de manera individual. El profesor intervendrá a la hora de esbozar la posición relativa de la curva respecto de la asíntota, que les cuesta más dificultad a los alumnos.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención de realizar esta actividad aparte de servir como repaso de las técnicas de cálculo de límites, sirve para que los alumnos representen gráficamente la posición relativa de la función y la asíntota que a priori pueden hallar dando valores a la función.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Dado que las asíntotas oblicuas son casos especiales de aproximación de orden 1, el profesor las explicará a continuación de las anteriores dando las expresiones de m y n correspondientes a la asíntota oblicua y=mx+n. También les dará un criterio para la existencia de asíntota oblicua. Sea la siguiente una tarea que el profesor podría plantear:

Calcula la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{-x^3 + 1}{2x^2 + 5}$ *. Representa la posición relativa de la curva y la asíntota.*
¿Existen asíntotas horizontales? ¿Y asíntotas verticales? ¿Existe asíntota oblicua de una racional donde la diferencia de grados sea mayor que 1?
Nota: Realiza la división entre los polinomios. ¿Qué significado tiene el cociente?

Material o recurso necesario: Ninguno específico

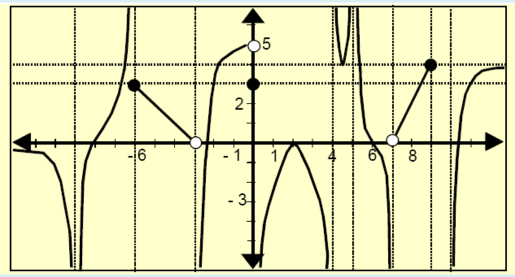
Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual. El profesor resolverá las dudas que aparezcan.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención del profesor es que los alumnos se den cuenta de que existen aproximaciones a la curva que no son constantes sino rectas, e incluso se puede generalizar a orden 2 (ramas parabólicas), pero esto último se propondría como tarea de ampliación.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:
Para que el alumno no sólo realice cálculos sino que ejercite su capacidad de interpretar gráficamente se les dará varias gráficas, de funciones desconocidas, que presenten asíntotas de los 3 tipos y se les pide que las reconozca.

Identifica para la siguiente gráfica los tipos de asíntotas que encuentres:



Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual. La tarea se entregará al profesor en la sesión siguiente.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor procurará que el alumno no esté la mayor parte del tiempo calculando, sino que de vez en cuando, interprete las gráficas para obtener información relevante que no puede obtener a priori de la fórmula.

SESIÓN 7: ESTUDIO DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

1. Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Concepto de continuidad de una función en un punto. Tipos de discontinuidad. Relación entre límite y continuidad. Relación entre asíntotas y discontinuidad. Análisis global de la continuidad de una función.

Contextos y situaciones: Científico.

Sistemas de representación utilizados: Simbólico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Reconocer y expresar de manera intuitiva los conceptos de función continua y discontinua en un punto después de argumentar que tiene sentido el estudio de la continuidad en dicho punto.(PR, R)
- Justificar la continuidad y discontinuidad en un punto mediante los límites laterales, ayudándose de herramientas tecnológicas.(PR, LS, HT)
- Relacionar tipos de discontinuidades con los límites laterales en un punto e identificar los tipos de discontinuidades gráficamente, ayudándose de herramientas tecnológicas.(R,HT)
- Determinar el dominio de continuidad de una función y esbozar su gráfica conociendo alguna de sus propiedades como asíntotas, máximos, mínimos, etc. (R)
- Estudiar de manera analítica y gráfica la continuidad de funciones que modelizan diversos fenómenos. (M, LS, HT)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Esta sesión debe englobar todos los contenidos vistos en las sesiones anteriores, ya que la continuidad está relacionada con el concepto de límite. Por tanto todas las tareas planteadas en las sesiones anteriores (salvo modificación oportuna) le pueden servir al profesor para ilustrar su actuación durante la sesión.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Es la sesión séptima, antes de la sesión de evaluación. En las sesiones anteriores se han visto todas las herramientas que en esta sesión jugarán un enorme papel y además puede servir de repaso de todos los contenidos con vistas a la prueba escrita que se realizará en la sesión 8.

3. Secuencia de tareas:

Tarea 1 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Después de presentar las tres condiciones que debe verificar una función en un punto para ser continua en él, los dominios de continuidad de las funciones polinómicas, racionales y radicales ,y los posibles tipos de discontinuidad el profesor expondrá ejemplos de aplicación para que los alumnos analicen si es continua en un punto o no. Una posible tarea tiene el enunciado siguiente:

Dadas las siguientes funciones. Determina el dominio de continuidad de las mismas y el tipo de discontinuidad en los puntos correspondientes:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -2x & si\ x \leq 1 \\ 5x+3 & si\ x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x < 1 \\ 5x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+7x^2+14x+9}{x^2+2x-3} & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Nota: Comprueba que tiene sentido estudiar la continuidad, en caso de que no sea posible estudia el límite.

Material o recurso necesario: Geogebra o graficador de funciones para mostrarlas gráficamente.

Descripción sobre la gestión del aula: Se dividirá a la clase en grupos y a cada grupo le asignaremos un apartado y después rotarán. Después se discutirán las posibles respuestas.

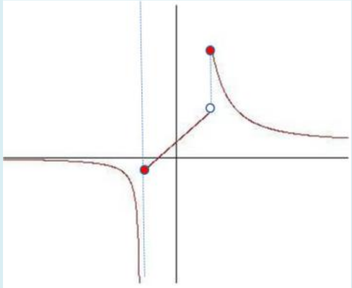
Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es que los alumnos observen y analicen las distintas variedades de discontinuidad que pueden existir y cómo se caracterizan en función de las condiciones que se incumplen.

Tarea 2 **(Duración aproximada: 15')**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor pintará en pizarra distintas gráficas y pedirá a los alumnos que reconozcan el dominio de continuidad y los tipos de discontinuidad en los puntos que correspondan. Sea la siguiente tarea un ejemplo.

Determina el dominio de continuidad y los tipos de discontinuidad que observes a la vista de la siguiente gráfica:



Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual, el profesor aclarará las dudas.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención del profesor es que los alumnos interpreten la continuidad y discontinuidad en las gráficas para después al proporcionarles las fórmulas, sepan lo que tiene que salir.

Tarea 3 **(Tarea para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

La tarea para casa debe recoger casi todo lo visto durante las 7 sesiones de clase. El profesor propondría una del estilo siguiente:

Dada la siguiente función definida a trozos responde a las siguientes cuestiones:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+a}{x+1} & si\ x<-1\\ x+b & si\ -1\le x<0\\ x^2+2x-1 & si\ 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x>1\end{cases}$$

a) Determina los puntos donde es necesario hacer un estudio particular de la continuidad. ¿Cómo es la función en los demás puntos?
b) Determina a y b para que la función sea continua en x=-1.
c) Para cada uno de esos puntos estudia la continuidad y determina, en caso de discontinuidad, qué tipo de discontinuidad existe.
c) Calcula todos los tipos de asíntotas que conozcas de la función.
d) Esboza la función gráficamente

Material o recurso necesario: Un graficador de funciones para orientarse.

Descripción sobre la gestión del aula: La tarea deberá entregarse para la siguiente sesión

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: El profesor pretende que los alumnos hagan un repaso de todo lo que han visto en esta unidad didáctica.

Nota final: En cualquiera de las sesiones se puede dar como ampliación lecturas de textos de matemáticos o de historia de la matemática, relacionados con algunas de las nociones que se han enseñado en clase.

5. EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES DE LA U.D.

Criterios de evaluación:

1. Obtiene el dominio y el recorrido de funciones.
2. Halla las funciones que resultan al efectuar operaciones con otras funciones más elementales, así como determina la función inversa de una función dada.
3. Obtiene los límites laterales de una función en un punto y determina la existencia o no existencia del límite.
4. Calcula límites de funciones tanto en un punto como en infinito resolviendo indeterminaciones.
5. Determina y clasifica las discontinuidades de una función definida a trozos o no y esboza su gráfica.
6. Busca y determina las asíntotas de una función, así como su posición relativa respecto de la curva.

Instrumentos de evaluación:

- Anotación de las actuaciones que vaya teniendo el alumno tales como: participación en clase, ya sea trabajando con los compañeros o con preguntas y sugerencias sobre el tema.

- Datos y trabajos aportados por el alumno, como:

  Pruebas escrita. Abarcará el contenido visto en las siete sesiones anteriores.

  Cuaderno de trabajo: se observará que esté completo, aseado, con explicaciones razonadas, etc.

  Tareas para casa.

- Comportamiento: se valorará positivamente la ayuda a sus compañeros y a la buena marcha de la clase, así como la corrección en el trato con todos.
- Plantilla de valoración. Esta plantilla consiste en ponderar los problemas planteados en la prueba escrita, según el número de alumnos que hayan tenido errores en esos problemas. Esto me permite deducir en qué aprendizajes deberé hacer más hincapié, o bien, cómo plantear los ejercicios de la prueba de recuperación.

Ponderación de los instrumentos de evaluación:

Cuaderno de trabajo y tareas para casa (5%)

Comportamiento y participación (5%)

Prueba escrita (90%)

En el ANEXO I del presente trabajo hay un modelo de evaluación de aprendizajes para esta unidad didáctica.

6. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

Las tareas que propongo a mis alumnos en las diferentes sesiones de la misma, atenderán a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, así como a sus intereses. Serán de dificultad graduada. Se dispondrá de una batería de tareas de refuerzo y de ampliación (que no se penalizarán al ser de un nivel de dificultad superior al exigido) para que, tanto los alumnos con dificultades de aprendizaje, como los que tienen capacidad para profundizar en los contenidos puedan superar la evaluación de la unidad didáctica y/o ampliar sus conocimientos sobre la misma. Propongo a continuación dos ejemplos de tareas, una de refuerzo y otra de ampliación para esta unidad didáctica.

Tarea de refuerzo:

Calcula los siguientes límites con las técnicas que creas convenientes:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x+3} \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+1}{x+3} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-11x+12}{x-4} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+5} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2-5x+7$$

Tarea de ampliación:

Hay que advertir que tal como está enfocada esta actividad, el procedimiento sólo es válido para funciones monótonas en un entorno cercano del punto, o bien, que donde se quiere estudiar el límite, la función alcance un máximo o mínimo relativo.

La definición formal de límite es la siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta : si\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Completa la siguiente tabla para la función $f(x)=x^2$ y a=2 responde a las siguientes cuestiones:

ε=1	δ	a-δ	a+δ	f(a-δ)	f(a+δ)	|L-f(a-δ)|	|L-f(a+δ)|
	1						
	0,1						
	0,01						
	0,001						
	0,0001						
	0,00001						

a) ¿Cuál crees que es el límite cuando x tiende a a=2?
b) ¿Para qué valor de δ los valores de f tanto por la derecha como por la izquierda distan de L menos de ε=1?
c) Realiza la misma tabla para otro punto distinto por ejemplo, a=5. ¿Para ε=1 depende δ del punto a? ¿o es el mismo que el anterior?. Prueba con otros valores de ε.

d) Utiliza el recurso interactivo http://www.aulademate.com/contentid-26.html para realizar de manera más precisa este ejercicio y prueba con otras funciones.

7. BIBLIOGRAFÍA.

Libros:

JOSÉ RAMÓN VIZMANOS BUELTA, FERNANDO ALCAIDE GUINDO, JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ, MARÍA MORENO WARLETA, ESTEBAN SERRANO MARUGÁN, *MATEMÁTICAS I*, Editorial SM.

FRANCISCO BENÍTEZ TRUJILLO, JUAN L.ROMERO ROMERO Y OTROS. *MATEMÁTICAS 1º BACH. CCNN.* PROYECTO AJIMEZ. Ediciones LA Ñ.

Artículos:

Una introducción al concepto de limite,(dos mil años en un renglón) Ing. Jorge J. L. Ferrante.

BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2000): *El concepto de límite en la educación secundaria*. En *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0.México.

ISIDORO SEGOVIA, LUIS RICO. *Unidades didácticas. Organizadores del currículo.*

ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato y ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.

Páginas web:

http://www.aulademate.com/contentid-26.html. , http://fooplot.com/

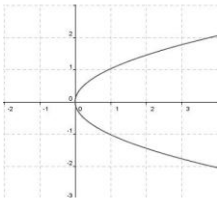
ANEXOS

ANEXO I. Modelo de evaluación de la U.D

Evaluación inicial:

Al principio de la unidad didáctica se imparte una sesión que revisará los conocimientos previos de los alumnos sobre funciones y se actualizarán con contenidos nuevos, lo cual les permitirá desenvolverse eficazmente en el resto de las sesiones. Una tarea de evaluación inicial sería la siguiente:

Decide justificadamente cuáles de las siguientes relaciones son funciones, en cuyo caso halla su dominio:
a) A cada alumno de a clase se le asocia su edad.
b) A cada profesor se le asocia los alumnos de su tutoría.
c) A cada número real positivo se le asocia sus raíces cuadradas.
d) A cada número real, le asociamos su doble más 5.
e)



Evaluación formativa:

A lo largo de las sesiones siguientes el profesor puede valorar la medida en los que se van alcanzando los objetivos y desarrollando las competencias mediante las tareas para casa y las realizadas durante la clase. Un ejemplo de tarea útil para una evaluación formativa sería ésta de la sesión 7 (tarea 1):

Dadas las siguientes funciones. Determina el dominio de continuidad de las mismas y el tipo de discontinuidad en los puntos correspondientes:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & si\ x>1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} -2x & si\ x\leq 1 \\ 5x+3 & si\ x>1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x<1 \\ 5x+3 & si\ x>1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+7x^2+14x+9}{x^2+2x-3} & si\ x\neq 1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$$

Nota: Comprueba que tiene sentido estudiar la continuidad, en caso de que no sea posible estudia el límite.

Con esta tarea puede valorar el uso de aprendizajes y herramientas que los alumnos han tenido en sesiones anteriores.

Evaluación sumativa:

Consistirá en una prueba escrita que se realizará en la octava sesión y junto a las valoraciones de los demás instrumentos de evaluación se dará una nota final al proceso de enseñanza-aprendizaje. Sea ésta una prueba escrita final de unidad con sus respectivas ponderaciones.

[2,5 puntos]1. Dada la siguiente función definida a trozos responde a las siguientes cuestiones:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+a}{x+1} & si\ x<-1 \\ x+b & si -1\le x<0 \\ x^2+2x-1 & si\ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x>1 \end{cases}$$

a) Determina los puntos donde es necesario hacer un estudio particular de la continuidad. ¿Cómo es la función en los demás puntos?
b) Determina a y b para que la función sea continua en x=-1.
c) Para cada uno de esos puntos estudia la continuidad y determina, en caso de discontinuidad, qué tipo de discontinuidad existe.
c) Calcula todos los tipos de asíntotas que conozcas de la función.
d) Esboza la función gráficamente

[2 puntos]2. Dadas las siguientes funciones. Determina el dominio de continuidad de las mismas y el tipo de discontinuidad en los puntos correspondientes:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si\ x\le 1 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & si\ x>1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} -2x & si\ x\le 1 \\ 5x+3 & si\ x>1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x<1 \\ 5x+3 & si\ x>1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+7x^2+14x+9}{x^2+2x-3} & si\ x\neq 1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$$

Nota: Comprueba que tiene sentido estudiar la continuidad, en caso de que no sea posible estudia el límite.

[2,5 puntos] 3. Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:

$$v(t)=\frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$$ *, donde t es el tiempo de vaciado en horas*

y v (t) es el volumen de agua expresado en m^3.

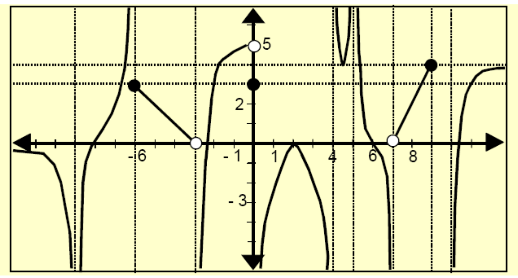
Averigua hacia dónde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1h.

[2 puntos] 4. Calcula los siguientes límites con las técnicas que creas convenientes:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x+3} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{1-\sqrt{4-x}} \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+1}{x+3} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-11x+12}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}} & si -1\le x<0 \\ x^2+1 & si\ x\ge 0 \end{cases}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+5} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2-5x+7$$

[1 punto] 5. Identifica en la siguiente gráfica los tipos de asíntotas que encuentres:



ANEXO II. Algunas tareas que intervienen en la U.D. analizadas según los indicadores usuales.

<u>Enunciado de la tarea 1:</u>

Calcula la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{-x^3+1}{2x^2+5}$ *. Representa la posición relativa de la curva y la asíntota.*
¿Existen asíntotas horizontales? ¿Y asíntotas verticales? ¿Existe asíntota oblicua de una racional donde la diferencia de grados sea mayor que 1?
Nota: Realiza la división entre los polinomios. ¿Qué significado tiene el cociente?

<u>Enunciado de la tarea 2:</u>

Dada la siguiente función definida a trozos responde a las siguientes cuestiones:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+a}{x+1} & si\ x < -1 \\ x+b & si - 1 \leq x < 0 \\ x^2+2x-1 & si\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Determina los puntos donde es necesario hacer un estudio particular de la continuidad. ¿Cómo es la función en los demás puntos?
b) Determina a y b para que la función sea continua en x=-1.
c) Para cada uno de esos puntos estudia la continuidad y determina, en caso de discontinuidad, qué tipo de discontinuidad existe.
c) Calcula todos los tipos de asíntotas que conozcas de la función.
d) Esboza la función gráficamente

Análisis de la tarea 1:

Objetivos	*6. Relacionar y expresar gráficamente límites y asíntotas, (encontrando sus ecuaciones).*		
Tipos de contenidos	*Función real de variable real: dominio y recorrido. (C)* *Operaciones con funciones. (C)* *Límite de una función en un punto. Límites laterales. (C)* *Límite en el infinito.(C)* *Cálculo de límites. (P)* *Asíntotas (C). Cálculo de asíntotas de funciones racionales (P).*		
Sistemas de representación	*Simbólico y gráfico.*		
Situación/Contexto	*Científico.*		
C.D Competencias **(complejidad)**	*R (Conexión)*	*LS (Conexión)*	*AJ (Conexión)*
	Formas de representación más o menos familiares de objetos matemáticos.	*Realizar cálculos mediante procedimientos familiares.*	*Seguir argumentos matemáticos de diferentes tipos*
Tipo de secuencia de aprendizaje.	*De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*		

Análisis de la tarea 2:

Objetivos	*6. Relacionar y expresar gráficamente límites y asíntotas, (encontrando sus ecuaciones).* *10. Determinar el dominio de continuidad de una función y esbozar su gráfica conociendo algunas de sus propiedades como sus asíntotas, máximos, mínimos, etc.*		
Tipos de contenidos	*Límite de una función en un punto. Límites laterales. (C)* *Límite en el infinito.(C)* *Cálculo de límites. (P)* *Continuidad. Tipos de discontinuidad. (C)* *Asíntotas (C). Cálculo de asíntotas de funciones racionales (P).* *Representación gráfica (P)*		
Sistemas de representación	*Simbólico y gráfico.*		
Situación/Contexto	*Científico*		
C.D Competencias	*R (Conexión)*	*LS (Conexión)*	*AJ (Reproducción)*
(complejidad)	*Formas de representación más o menos familiares de objetos matemáticos.*	*Resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.*	*Seguir argumentos matemáticos estándar.*
Tipo de secuencia de aprendizaje.	*De síntesis y evaluación.*		