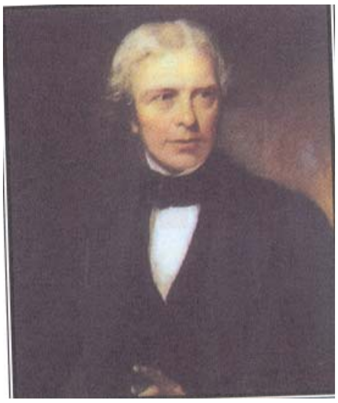
UNIDAD V: INDUCCION ELECTROMAGNETICA

Experiencias de FARADAY. Fuerza electromotriz de movimiento. Ley de inducción de FARADAY. Ley de LENZ. Corrientes de FOUCAULT. Aplicaciones de la Ley de FARADAY. Generadores de fuerza electromotriz. Inducción mutua. Autoinducción. Energía almacenada en un inductor. Circuitos con inductancia y capacidad. Analogía mecánica.

Índice

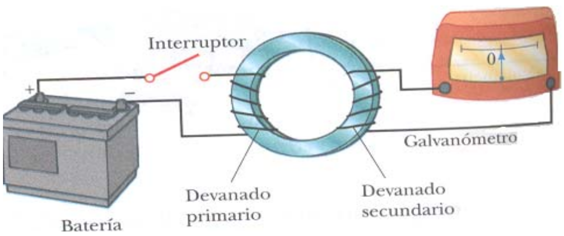
Experiencias de FARADAY

Para algunas leyes físicas es difícil encontrar experimentos que conduzcan de una manera directa y convincente a la formulación de la ley. La ley de inducción electromagnética de Faraday, que es una de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, es diferente en cuanto a que hay un buen numero de experimentos sencillos de los cuales puede deducirse directamente.



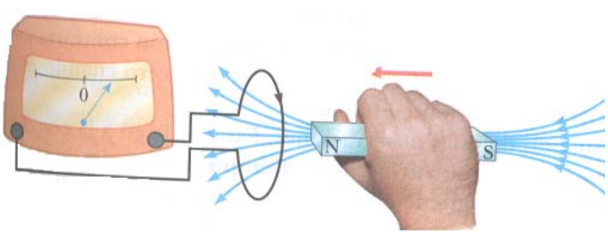
Fueron llevados a cabo por Michael Faraday en Inglaterra en 1831 y por Joseph Henry en los Estados Unidos aproximadamente en la misma época. Como la corriente eléctrica continua que circula por un alambre produce un campo magnético alrededor del mismo, inicialmente Faraday pensó que un campo estacionario podía producir una corriente

Faraday utilizo un montaje como se ve en el grafico



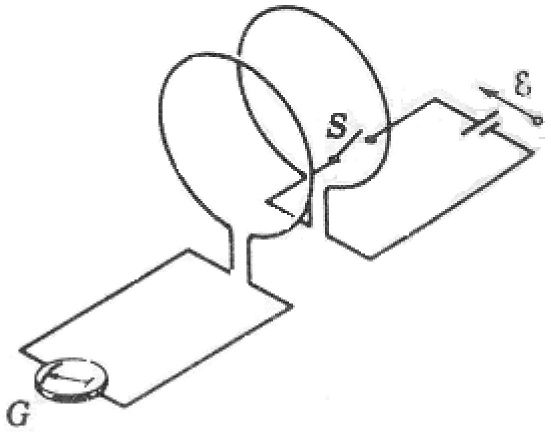
En este montaje la corriente que pasa por la bobina produce un campo magnético que se concentra en el anillo de hierro, mientas que la bobina de la derecha esta conectada a un galvanómetro.

Cuando el campo magnético generado por la bobina izquierda esa estacionario no aparecía corriente inducida en la bobina derecha. Sin embargo aparecía una corriente momentánea en el instante en que se cerraba el interruptor S de la bobina izquierda, cuando se abría de nuevo volvía a observarse una corriente inducida momentáneamente en la bobina derecha y esta tenia sentido contrario a la primera. Por lo tanto únicamente existía corriente inducida cuando el campo magnético producido por la bobina *estaba cambiado.*



La figura de la derecha muestra una bobina conectada a un galvanómetro , si introducimos un imán recto en la bobina con su polo norte hacia la bobina ocurre que mientras el iman bobina ahora esta en sentido contrario este en movimiento el galvanómetro se desvía, poniendo en manifiesto que esta pasado una corriente por la bobina . Si el imán se mueve alejándose de la bobina el galvanómetro se desvía nuevamente pero en sentido contrario, lo que quiere decir que la corriente en la

Con varios experimentos de este tipo se demuestra que lo que importa es el movimiento relativo del imán y la bobina. La corriente que aparece en este experimento se llama *corriente inducida* y se dice que es producida por *una fuerza electromotriz inducida.*
Otro experimento de este tipo es el que vemos en la siguiente figura



Las bobinas se colocan en reposo una con respecto a la otra, cuando se cierra el interruptor S, produciendo una corriente constante en la bobina de la derecha, el galvanómetro se desvía momentáneamente, cuando se abre el interruptor, nuevamente el galvanómetro se desvía. Los experimentos demuestran habrá una *fem* inducida en la bobina de la izquierda siempre que cambia la corriente de la bobina de la derecha. Lo importante es la rapidez con la cual cambia la corriente y no la magnitud de la misma.

Ley de inducción de FARADAY

Faraday tuvo la intuición de darse cuenta que el cambio en el flujo , Φ_B , de inducción magnética para la bobina de la izquierda y en los otros experimentos realizados era el factor común importante. Este flujo puede ser producido por un imán recto o por una espira de corriente. La ley de la inducción de Faraday dice que la fuerza electromotriz inducida, ε , en un circuito es igual al valor negativo de la rapidez con la cual está cambiando el flujo que atraviesa el circuito. La ecuación que define la ley de inducción de Faraday la podemos expresar como:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

El signo menos es una indicación del sentido de la fem inducida. Si la bobina tiene N vueltas, aparece una fem en cada vuelta que se pueden sumar, es el caso de los tiroides y solenoides, en estos casos la fen inducida será:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\left(N\Phi_B\right)}{dt}.$$

Podemos resumir diciendo "*La fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con la que varía el flujo magnético que lo atraviesa, y directamente proporcional al número de espiras del inducido.*"

Ley de Lenz

Aunque la ley de Faraday-Henry, a través de su signo negativo, establece una diferencia entre las corrientes inducidas por un aumento del flujo magnético y las que resultan de una disminución de dicha magnitud, no explica este fenómeno:

Una forma de escribir la ley de Lenz en términos de la contribución de la corriente inducida al campo magnético total es la siguiente*: el sentido de la corriente inducida es tal que su contribución al campo magnético total se opone a la variación del flujo de campo magnético que produce la corriente inducida.*

Así, cuando el polo norte de un imán se aproxima a una espira, la corriente inducida circulará en un sentido tal que la cara enfrentada al polo norte del imán sea también Norte, con lo que ejercerá una acción magnética repulsiva sobre el imán, la cual es preciso vencer para que se siga manteniendo el fenómeno de la inducción. Inversamente, si el polo norte del imán se aleja de la espira, la corriente inducida ha de ser tal que genere un polo Sur que se oponga a la separación de ambos. Sólo manteniendo el movimiento relativo entre espira e imán persistirán las corrientes inducidas, de modo que si se detiene el proceso de acercamiento o de separación cesarían aquéllas y, por tanto, la fuerza magnética entre el imán y la espira desaparecería.

La ley de Lenz, que explica el sentido de las corrientes inducidas, puede ser a su vez explicada por un principio más general, el principio de la conservación de la energía. La producción de una corriente eléctrica requiere un consumo de energía y la acción de una fuerza desplazando su punto de aplicación supone la realización de un trabajo. En los fenómenos de inducción electromagnética es el trabajo realizado en contra de las fuerzas magnéticas que aparecen entre espira e imán el que suministra la energía necesaria para mantener la corriente inducida. Si no hay desplazamiento, el trabajo es nulo, no se transfiere energía al sistema y las corrientes inducidas no pueden aparecer. Análogamente, si éstas no se opusieran a la acción magnética del imán, no habría trabajo exterior, ni por tanto cesión de energía al sistema.

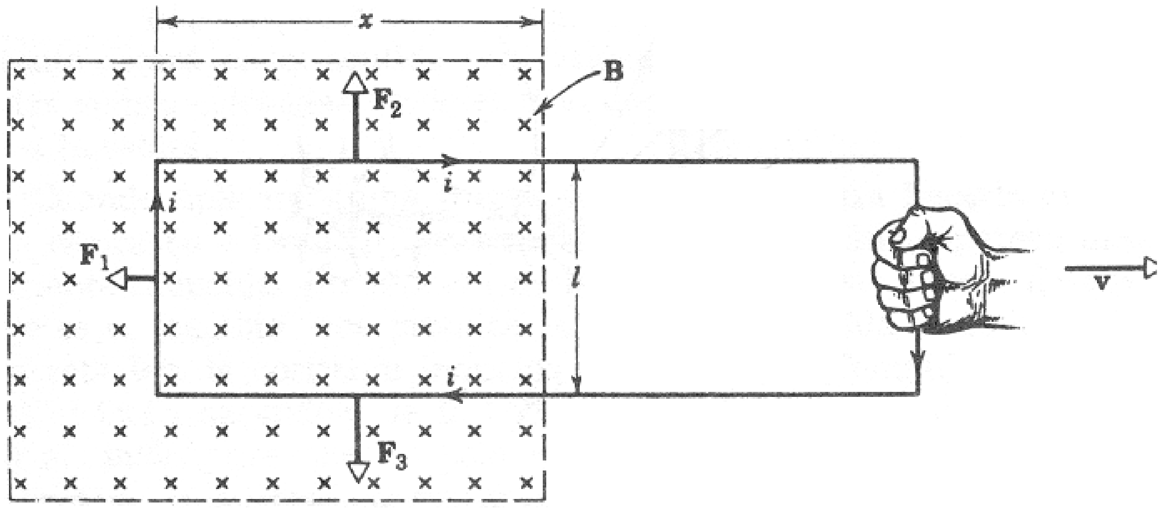
Podemos decir que el fenómeno de inducción electromagnética se rige por dos leyes:

. La ley de Lenz: cualitativa, que nos da el sentido de la corriente inducida
. La ley de Faraday-Henry: cuantitativa, que nos da el valor de la corriente inducida.

Ejemplo: Espira en campo magnético

En la figura vemos una expira rectangular de ancho l, uno de cuyos extremos se encuentra en un campo de inducción magnético uniforme B, dirigido perpendicularmente al plano de la espira, movemos la espira a la derecha con una velocidad constante v. En este caso hay un movimiento relativo entre la espira conductora y el campo magnético. El flujo encerrado por la espira, Φ_B, será: $\Phi_B = Blx$

Siendo lx el área de la parte de la espira en la cual B no es cero



La fem ε se encuentra aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Blx\right) = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$, donde hemos puesto $v = -\frac{dx}{dt}$

La fem ε produce una corriente en la espira, dependiendo de la, resistencia de la espira, R, que será $i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R}$

La corriente de la espira hará que surjan tres fuerzas, F_1, F_2 y F_3, cuyo valor será

$\vec{F} = i\vec{l}x\vec{B}$, como F_3 y F_2 son iguales y de sentido opuesto, se anulan, entonces F_1 es la fuerza que se oponen al esfuerzo para mover la espira, cuya magnitud será:

$$F_1 = ilBsen90^0 = \left(\frac{Blv}{R}\right)lB = \frac{B^2l^2v}{R}$$, en consecuencia el trabajo necesario para mover la espira, por unidad de tiempo será:

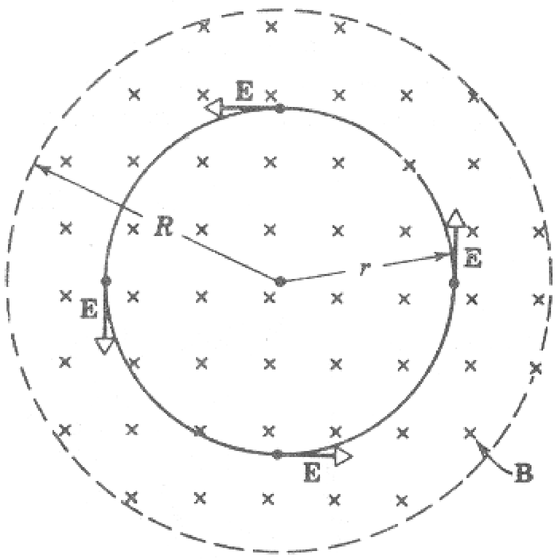
$$P = F_1 \frac{d}{t} = F_1 v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$, este resultando es idéntico a considerar la potencia disipada por efecto Joule sobre la resistencia, P_j, la cual podemos calcular como

$$P_j = Ri^2 = \left(\frac{Blv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Campos magnéticos variables con el tiempo

Hasta ahora hemos visto fems inducidas por el movimiento relativo entre los imanes y las bobinas. Consideremos ahora que no hay movimiento de objetos, sino que el campo magnético puede variar con el tiempo. Si una espira conductora se coloca en el campo magnético que varía con el tiempo, cambiará el flujo que pasa por la espira y en consecuencia aparecerá una fem inducida en la espira. Desde un punto de vista microscópico podemos decir que el flujo variable de B produce un campo eléctrico E en diversos puntos alrededor de la espira , el campo eléctrico inducido tiene las mismas propiedades que un campo eléctrico producido por cargas estáticas, en consecuencia ejercer una fuerza sobre una carga de prueba q_0, dada por $F = q_0 E$, podemos asegurar entonces que: *Un campo magnético que cambia produce un campo eléctrico* , expresión que podríamos considerar como otra manera de expresar la ley de Faraday.

Consideremos a modo de ejemplo la figura siguiente, suponemos un campo uniforme de inducción magnética $\vec{B}$, perpendicular al plano, supongamos que $\vec{B}$ va aumentando de magnitud con una rapidez constante $\frac{dB}{dt}$ en todos los puntos.



El circulo de radio r encierra en un instante cualquiera un flujo Φ_B. Debido a que este flujo esta cambiando aparecerá alrededor de la espira una fem inducida $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Los campos eléctricos $\vec{E}$ inducidos en diversos puntos de la espira, por simetría deben ser tangentes a la espira. Si consideramos una carga de prueba q_0 que se mueve alrededor del círculo el trabajo hecho sobre ella, W, por cada vuelta será: $W = F_e d = q_0 E(2\pi r)$, además en virtud de la definición de una fem será $W = \varepsilon q_0$, igualando ambas expresiones nos queda:

$\varepsilon q_0 = q_0 E 2\pi r \Rightarrow \varepsilon = E 2\pi r$, para un caso más general será

$\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l}$ Si combinamos esta expresión con $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

podemos escribir la Ley de Faraday en su forma más general como :

$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ o en su forma integral como $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int \vec{B} d\vec{S}$

Corrientes de Foucault

Supongamos un campo magnético variable perpendicular a una cara de un conductor extenso, por ejemplo una placa. El campo eléctrico inducido en el conductor producirá en su interior corrientes eléctricas inducidas, conocidas como corrientes de Foucault o corrientes en remolino. Estas corrientes de Foucault se producen también cuando un conductor se mueve en el seno de un campo magnético. Su efecto es una disipación de energía por calentamiento Joule del conductor $\left(P = i^2 R\right)$. Un material conductor puede ser calentado por las corrientes de Foucault inducidas en su interior por un campo eléctrico variable, proceso que se conoce como calentamiento por inducción.

El los casos en que no desee esta disipación de energía, por ejemplo el núcleo de hierro de un transformador, este núcleo se fabrica con láminas delgadas de hierro conductor separadas por capas aislantes. Las capas aislantes aumentan muy fuerte la resistencia en el camino de las cargas, de manera tal que reducen la corriente y en consecuencia el calentamiento.

Aplicaciones de la Ley de Faraday. Generadores de fuerza electromotriz.

La ley de Faraday proporciona el principio para la conversión de energía mecánica en energía eléctrica. Los dispositivos utilizados son el resultado de un gran desarrollo tecnológico, pero los principios básicos de su funcionamiento pueden entenderse considerando una espira girando en el seno de un campo magnético.

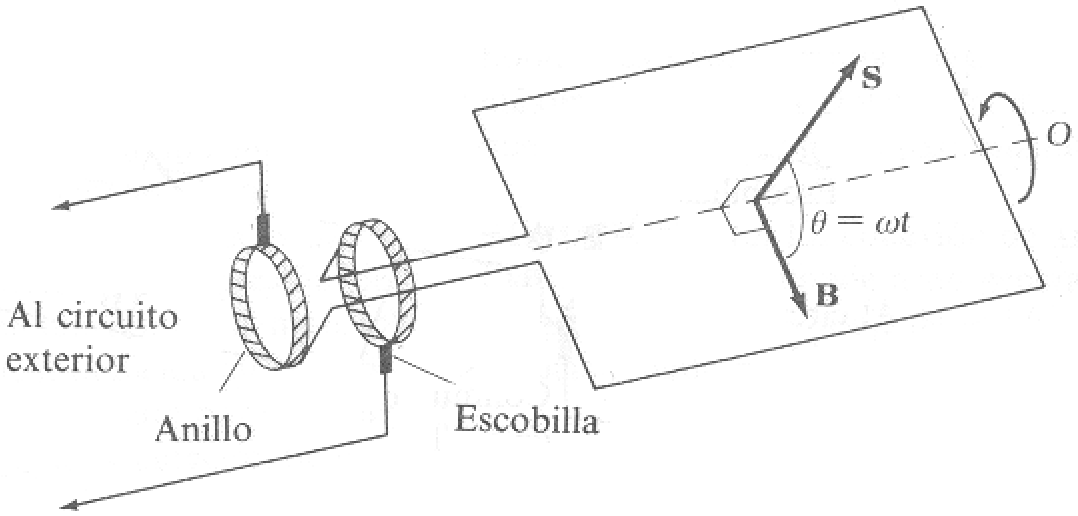
Producción de una corriente alterna

La corriente alterna se caracteriza porque su sentido cambia alternativamente con el tiempo. Ello es debido a que el generador que la produce invierte periódicamente sus dos polos eléctricos, convirtiendo el positivo en negativo y viceversa, muchas veces por segundo.

La ley de Faraday establece que se induce una fuerza electromotriz en un circuito eléctrico siempre que varíe el flujo magnético que lo atraviesa. Recordando con la definición de flujo magnético $\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{S} = \int BdS \cos\theta$

O sea éste puede variar porque varíe el área S limitada por el conductor, porque varíe la intensidad del campo magnético B o porque varíe la orientación entre ambos dada por el ángulo. θ.

En las primeras experiencias de Faraday las corrientes inducidas se conseguían variando el campo magnético B ; también es posible provocar el fenómeno de la inducción sin desplazar el imán ni modificar la corriente que pasa por la bobina, haciendo girar ésta en torno a un eje dentro del campo magnético debido a un imán. En tal caso el flujo magnético Φ_B varía porque varía el ángulo θ .



Como la espira esta girando, el ángulo θ varía continuamente, lo cual hace que el flujo este cambiando, y por lo tanto aparece una *fem* inducida.

Si se hace rotar la espira uniformemente, ese movimiento de rotación periódico da lugar a una variación también periódica del flujo magnético, supongamos que la espira gira con una velocidad angular ω constante, el ángulo en un instante t es $\theta = \omega t$, y el flujo Φ_B que atraviesa la espira será:

$\Phi_B = BS\cos\varpi t$, según la ley de Faraday la *fem* inducida es $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

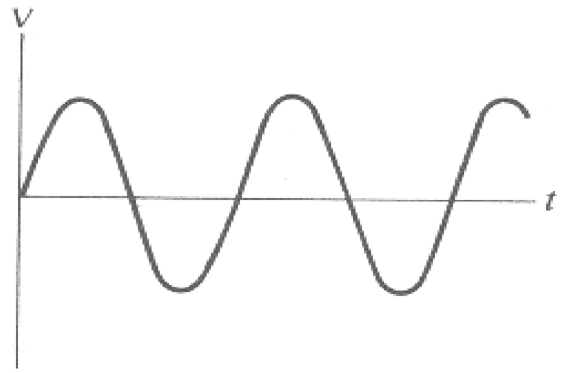
que en este caso será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\left(BS\cos\varpi t\right)}{dt} = BS\,\varpi sen\,\varpi t$$

Para una bobina de N espiras o vueltas, se induce una fem en cada vuelta y como están conectadas en serie la fem total es N veces la de una vuelta.

$$\varepsilon = NBS\,\varpi sen\,\varpi t$$

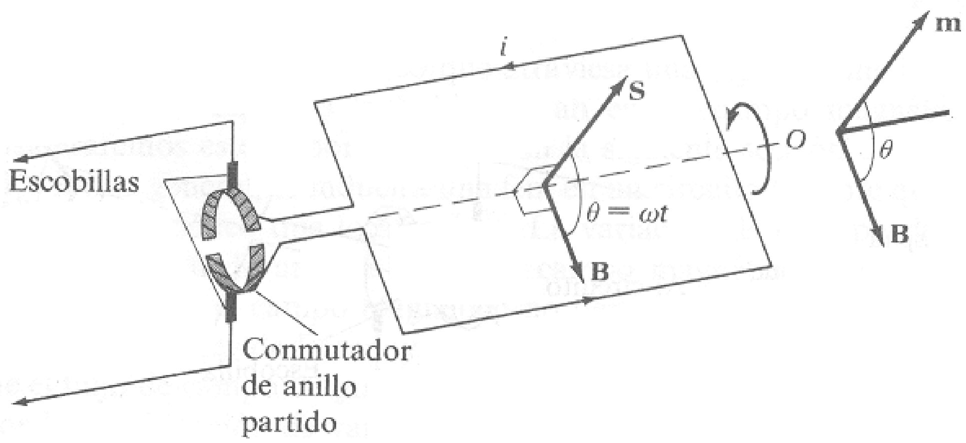
La fem obtenida oscila sinusoidalmente con una frecuencia angular ω o sea con una frecuencia $f = \dfrac{\varpi}{2\pi}$. El valor máximo o valor pico de la fem es $\varepsilon_{\max} = NBS\,\varpi$ que ocurre cuando $sen\,\omega t = 1$, como la función seno varia entre valores de +1 y -1 la fem oscilara entre valores de $+\varepsilon_{\max}$ y $-\varepsilon_{\max}$. La corriente asociada a una fem de este tipo también oscilará.



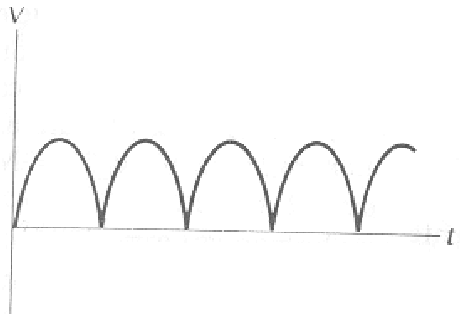
En la figura se ve la forma de señal generada por un generador de corriente alterna (CA).

Para que una bobina en rotación actué como un generador para un circuito externo debe estar conectada al circuito por medio de alambres de conexión, en el esquema del circuito vemos que los alambres están unidos a anillos conductores que giran con la espiras, sujetos a un eje, el contacto con el exterior se realiza por medio de escobillas conductoras que se deslizan sobre la superficie de los anillos rotantes.

Vemos a continuación otro tipo de conexión distinta de la espira con el exterior, las escobillas hacen contacto con las mitades de un *conmutador de anillo partido.*



Durante una primera parte de la rotación el voltaje de salida de la bobina corresponde a la parte positiva de un ciclo, pero cuando el ciclo negativo va a comenzar las escobillas hacen contacto con las mitades opuestas del conmutador, invirtiendo el signo del voltaje. De esta forma el conmutador hace que el sentido del voltaje de salida permanezca igual, como vemos en la figura siguiente



El generador que incorpora el conmutador para mantener el sentido de la corriente se llama generador de corriente continua

El alternador

Es el nombre que recibe el generador de corriente alterna. Se basa en la producción de una fuerza electromotriz alterna mediante el fenómeno de inducción electromagnética. El imán que genera el campo magnético se denomina inductor y la bobina en la que se induce la fuerza electromotriz recibe el nombre de inducido. Los dos extremos de hilo conductor del inducido se conectan a unos anillos colectores que giran junto con la bobina. Las escobillas, que suelen ser de grafito, están en contacto permanente, mediante fricción, con los anillos colectores y transmiten la tensión eléctrica producida a los bornes del generador en donde puede conectarse a un circuito exterior.

Por lo general, la bobina del inducido se monta sobre un núcleo de hierro. La elevada permeabilidad magnética de este material hace que el campo magnético que atraviesa la bobina aumente; ello significa que las líneas de fuerza se aproximan entre sí aumentando el flujo magnético y, consiguientemente, el valor máximo de la f.e.m. inducida. Un efecto semejante se consigue aumentando el número de espiras del inducido.

En los grandes alternadores, el inducido está fijo y es el inductor el que se mueve, de modo que en este caso no son necesarios los anillos colectores ni las escobillas. Aunque la inducción electromagnética depende del movimiento relativo entre el campo magnético y el conductor, con este procedimiento se consigue salvar algunos inconvenientes relacionados con el paso de corrientes elevadas por el colector y las escobillas. Por lo general, en los alternadores comerciales el campo magnético es producido por un electroimán y no por un imán natural; en tales casos el inductor se denomina también excitador, pues es una corriente eléctrica la que excita la producción del campo magnético externo.

Los alternadores son los elementos esenciales en las centrales eléctricas. En ellos se genera una muy alta tensión eléctrica que se transporta a través de una red de tendidos eléctricos y es transformada en estaciones intermedias para llegar finalmente hasta los enchufes domésticos con un valor eficaz de 220 V. La frecuencia de oscilación de esta tensión alterna en Argentina es de 50 Hz, lo que equivale a 50 ciclos por segundo.

La dinamo

Puede ser considerada como una modificación del alternador que permite generar corrientes continuas. Para lograr que la corriente que circula por la bobina tenga un único sentido, se han de invertir las conexiones justo en el instante en el que la fem cambia de signo. Ello se consigue sustituyendo los anillos colectores por un cilindro metálico compuesto de dos mitades aisladas entre sí o delgas y conectadas cada una a un extremo de hilo conductor de la bobina. Esa pieza se denomina conmutador porque cambia o conmuta en cada media vuelta la polaridad del generador, de tal forma que la tensión que llega a los bornes a través de las escobillas tiene siempre el mismo signo y al conectarlo al circuito exterior produce una corriente continua.

En las dinamos sencillas la tensión producida, aunque tiene siempre el mismo signo, no mantiene un mismo valor, sino que varía de una forma ondulada o pulsante. Sin embargo, es posible conseguir una fem prácticamente constante introduciendo un número suficiente de bobinas, dividiendo otras tantas veces el anillo colector y añadiendo los correspondientes pares de escobillas. Por este procedimiento la ondulación de la tensión, que es pronunciada en una dinamo sencilla, se reduce a un ligero rizado despreciable.

Las bicicletas utilizan la dinamo para producir luz a partir del movimiento. Tratándose por lo general de una dinamo sencilla, puede observarse cómo a baja velocidad la intensidad luminosa aumenta y disminuye alternativamente a un ritmo que depende de la velocidad. Cuando ésta es suficiente, la rapidez de la oscilación unida a la inercia del sistema hace que la intensidad luminosa de la lámpara se mantenga prácticamente constante. Este efecto es semejante al que se consigue al aumentar el número de bobinas, de delgas y de escobillas. La dinamo es una máquina reversible que puede actuar como motor si se le aplica a través de las escobillas una corriente continua de intensidad conveniente. En el primer caso, funcionando como dinamo, la máquina transforma energía mecánica en energía eléctrica; en el segundo transforma energía eléctrica en movimiento.

Inducción mutua

Si se colocan dos bobinas una cerca de la otra, una corriente i en una bobina producirá un flujo Φ_B en la otra bobina, si este flujo cambia porque cambia la corriente, aparecerá una fem inducida en la segunda bobina de acuerdo con la Ley de Faraday. Sin embargo no se necesitan dos bobinas para poner de manifiesto un efecto de inducción. Aparece una fem inducida en la bobina si cambia la corriente en la bobina misma. Este fenómeno se llama autoinducción y la fuerza electromotriz producida de esta manera se llama *fem* autoinducida. Obedece a la Ley de Faraday de la misma manera que la obedecen otras *fems* inducidas.

Consideremos una bobina apretada (un toroide o la parte central de un solenoide) en estos casos el flujo Φ_B producido por cada vuelta por una corriente i se puede considerar que es el mismo para cada vuelta, de la ley de Faraday nos queda:

$\varepsilon = -\dfrac{d\left(N\Phi_B\right)}{dt}$, en número de encadenamientos de flujo $N\Phi_B$ es la cantidad característica importante para la inducción, para una bobina dada, esta cantidad es proporcional a la corriente i, o sea

$i \approx N\Phi_B$ la constante de proporcionalidad recibe el nombre de *inductancia* del aparato L de manera que nos queda

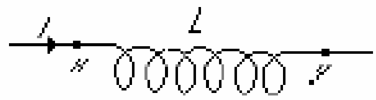
$iL = N\Phi_B$, reemplazando en la Ley de Faraday será

$\varepsilon = -\dfrac{d\left(N\Phi_B\right)}{dt} = -\dfrac{d\left(Li\right)}{dt} = -L\dfrac{di}{dt}$, definimos la inductancia como

$L = -\dfrac{\varepsilon}{di/dt}$ siendo esta la ecuación de definición de inductancia para bobinas de todas formas y tamaños, ya sea que estén apretadas o no, que haya hierro u otros materiales en su núcleo. Es análoga a la relación de definición de la capacidad $C = \dfrac{q}{V}$.

Si no hay hierro u otros materiales similares, L, lo mismo que vimos en su momento C, depende solo de la geometría del aparato. En un inductor la presencia de un campo magnético es la característica importante, que se corresponde a la presencia de un campo eléctrico en un condensador.

El símbolo usado es para L



La unidad de la inductancia la obtenemos de la definición de L vista $L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$

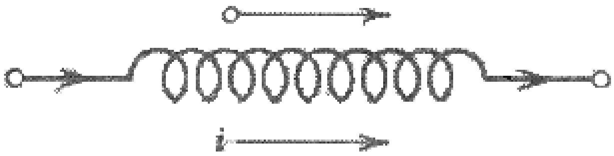
$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt} \quad [L] = \frac{[\varepsilon]}{[i]/[t]} = \frac{[volts][seg]}{[amp]} = henry$$

Son de uso frecuente los submúltiplos

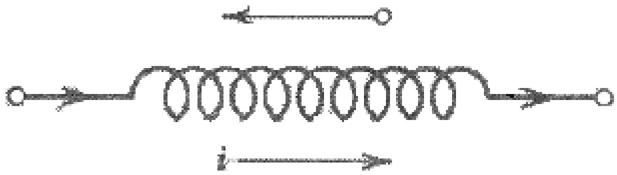
$$milihenry = 1*10^{-3}\,henry$$

$$microhenry = 1*10^{-6}\,henry$$

LA dirección de la *fem* inducida se puede encontrar mediante la ley de Lenz. Supongamos que pasa por una bobina una corriente constante i, producida por una batería, la corriente i comenzará a disminuir, esta disminución es el cambio a que debe oponerse la autoinducción, para oponerse a la corriente que decrece, la *fem* inducida debe estar en el mismo sentido de la corriente



Cuando la corriente de la bobina aumenta, la *fem* autoinducida debe estar en sentido contrario al de la corriente



en ambos casos la *fem* autoinducida obra oponiéndose al cambio de la corriente. El signo menos de la ecuación $L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$ indica que ε y di/dt son de signo contrario porque L es siempre positiva.

Cálculo de la inductancia

Es posible calcular en forma sencilla la autoinducción para algunos casos, para una bobina de apretada, sin hierro, tenemos que

$L = \frac{N\Phi_B}{i}$, aplicamos esta ecuación para calcular L, para un tramo de longitud l, cerca del centro de un solenoide largo. En número de enlaces de flujo en una longitud dada l de un solenoide es: $N\Phi_B = (nl)(BA)$, siendo n el numero de vueltas por unidad de longitud, B la inducción magnética dentro del solenoide y A el área de sección trasversal. De acuerdo a lo que ya vimos: $B = \mu_0 ni$, reemplazando obtenemos

$N\Phi_B = (nl)(BA) = \mu_0 n^2 liA$ De donde despejando nos queda

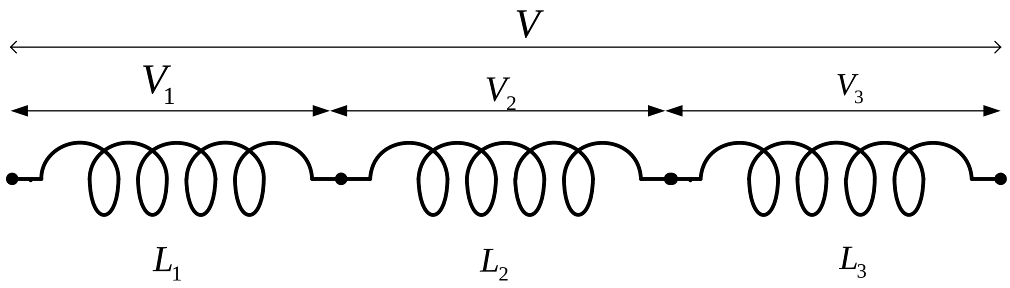
$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 liA}{i} = \mu_0 n^2 lA$$

Vemos que solo depende factores geométricos de construcción. Si se duplica el número de vueltas por unidad de longitud n no solo se duplica el número total de vueltas N sino también el flujo Φ_B que pasa por cada vuelta, dando en consecuencia un factor de cuatro para los enlaces de flujo y por consiguiente para la inductancia.

Inductancia en serie y paralelo

Al igual que vimos para el caso de capacitores y resistencias, dado un circuito formado por varias bobinas es posible calcular el valor de una única inductancia que reemplace a todo el conjunto, será *la inductancia equivalente.*

Inductancia en serie



de la definición de inductancia tenemos $V = L\dfrac{di}{dt}$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} =$$

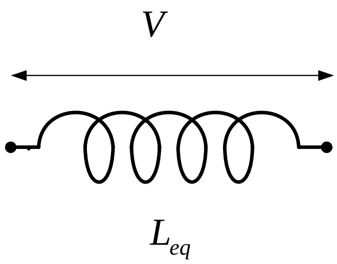
$$V = \left(L_1 + L_2 + L_3\right)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

Nos queda entonces para bobinas en serie

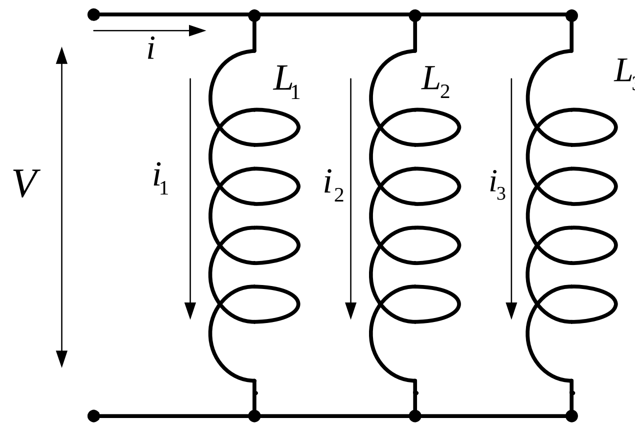
$$L_{eq} = \left(L_1 + L_2 + L_3\right)$$

Generalizando para n bobinas en serie será

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$



Inductancia en paralelo



$V = V_1 = V_2 = V_3$

$i = i_1 + i_2 + i_3$ Como de la definición de inductancia tenemos $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{V}{L}$ Reemplazando y despejando nos queda

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

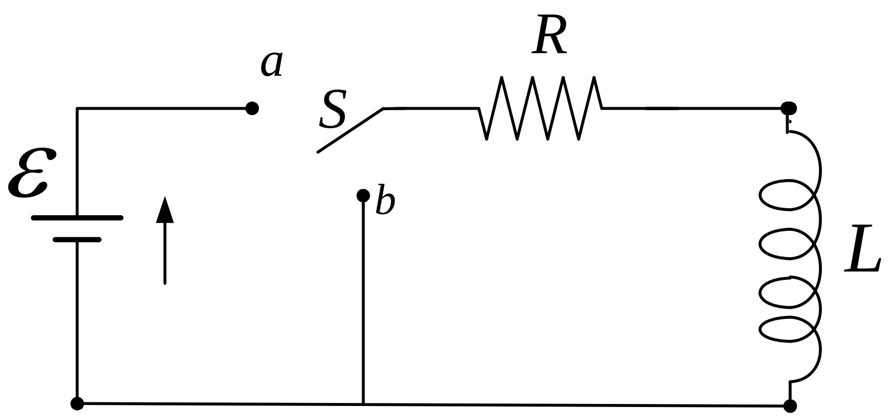
de donde será $$\frac{V}{L_{eq}} = \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} + \frac{V_3}{L_3} \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

para n bobinas en paralelo será :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

Circuito LR

Cuando analizamos el circuito **RC** , vimos que al introducir el condensador la carga no toma inmediatamente su valor de equilibrio, este retrazo en el aumento de la carga se designa constante de tiempo capacitiva. Un retrazo análogo en el aumento o disminución de la corriente eléctrica se presenta si se conecta o si se desconecta una fem en un circuito que tenga una resistencia R y una inductancia L . Analicemos el siguiente circuito:

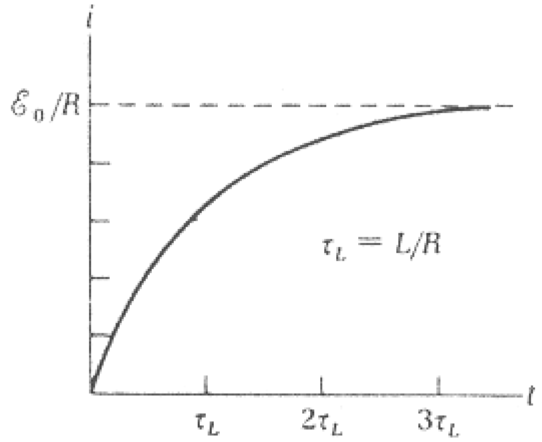


Cuando el interruptor S se cierra en a la corriente en la resistencia comienza a elevarse. Si no hubiera inductancia aumentaría rápidamente hasta un valor ε / R . Debido a la inductancia aparece una fem autoinducida, que de acuerdo a la Ley de Lenz, se opone al crecimiento de la corriente, de manera tal que podemos escribir la ecuación del circuito como:

$-iR - L\dfrac{di}{dt} + \varepsilon = 0$, es una ecuación diferencial en la que interviene la variable i y su primer derivada di/dt , cuya solución es:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

cuya grafica es :

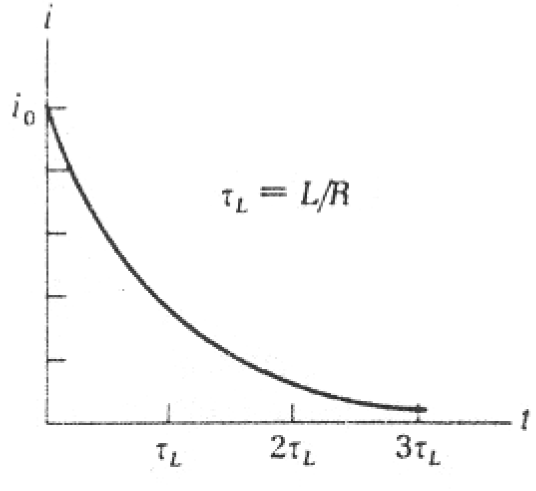


Donde definimos la constante de tiempo inductiva como

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

SI mantenemos el interruptor en la posición a el tiempo suficiente como para que la corriente i llegue al valor de equilibrio ε/R y pasamos ahora el interruptor S a la posición b , la ecuación del circuito nos queda:

$iR + L\dfrac{di}{dt} = 0$ cuya solución es $i = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ cuya grafica será



Energía y el campo magnético

Hemos visto que el campo eléctrico podía considerarse como asiento de energía almacenada, y en el vacío la densidad de energía eléctrica vale:

$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, siendo E la intensidad del campo eléctrico del punto analizado. Si bien el razonamiento se hizo para un capacitar de placas planas paralelas es valida para todas las configuraciones de campos eléctricos.

La energía también puede almacenarse en un campo magnético. Por ejemplo dos alambres que llevan corrientes en el mismo sentido se atraen entre si, y para separarlos algo más debemos realizar trabajo. Esta energía gastada se almacena en el campo magnético que existe entre los alambres. La energía puede recobrarse permitiendo que los alambres vuelvan a su posición original.

Consideremos el circuito anterior para derivar una expresión de la energía, de la ecuación de circuito nos queda:

$-iR - L\frac{di}{dt} + \varepsilon = 0$, recordemos que el teorema de las mallas es consecuencia directa del principio de conservación de la energía. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por i

$$i\varepsilon = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

el termino $i\varepsilon$, es la velocidad con que la fuente entrega energía al circuito

i^2R es la disipación de energía por efecto Joule el la resistencia.

$Li\frac{di}{dt}$ es en consecuencia la velocidad con que se almacena energía en el campo magnético

$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$ Simplificando dt

$dU_B = Lidi$, integrando ambos miembros

$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^{i} Li di = \frac{1}{2}Li^2$, que representa la energía total almacenada en una inductancia L que lleva una corriente i.

Densidad de energía

Buscamos ahora una expresión para la densidad de energía u en un campo magnético Consideremos una longitud l cerca del centro de un solenoide muy largo, el volumen asociado con esa longitud será Al, donde A es el área del solenoide. La energía almacenada debe estar por completo dentro del volumen, porque el campo magnético fuera del solenoide es casi cero. Además la energía almacenada debe estar uniformemente distribuida porque el campo magnético es constante dentro del solenoide. Podemos escribir entonces:

$u_B = \frac{U_B}{volumen} = \frac{U_B}{Al}$, como ya vimos $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, reemplazando nos queda

$u_B = \frac{1}{2}\frac{Li^2}{Al}$ para un solenoide vimos que $L = \mu_0 n^2 lA$ y que la corriente podemos despejarla de $B = \mu_0 in \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n}$, reemplazando estos valores nos queda

$u_B = \frac{1}{2}\frac{(\mu_0 n^2 lA)}{Al}\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$, es decir $u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

Esta ecuación da la densidad de energía almacenada en cualquier punto (en el vacío o en una sustancia no magnética) en donde la inducción magnética sea $\vec{B}$. La ecuación es válida para toda clase de configuraciones de campo magnético, aun cuando se la obtuvo para el caso especial del solenoide.

Oscilaciones eléctricas – Circuito LC

Un sistema LC se asemeja a un sistema masa-resorte en que entre otras cosas ambos sistemas tienen una frecuencia característica de oscilación. Supongamos un circuito formado por un condensador C y una bobina L. Consideremos el estado inicial en que el condensador esta cargado con una carga q_m y que la corriente en la bobina es cero. En este momento la energía almacenada en el condensador será:

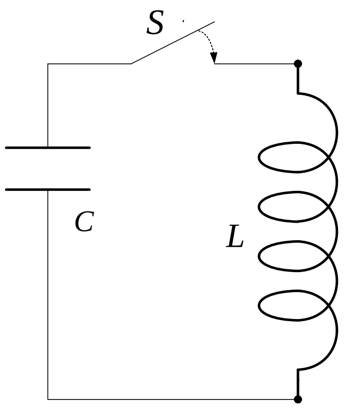
$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$$

Conforme q_m disminuye, también disminuye la energía almacenada en el condensador. Esta energía es transmitida al campo magnético que aparece alrededor del inductor debido a la corriente i. El campo eléctrico disminuye, se forma un campo magnético y la energía se transmite del primero al segundo. Le energía en el campo magnético será:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

En un determinado momento la carga del condensador será cero, le energía almacenada en el condensador habrá pasado por completo al campo magnético del inductor, en este momento fluye energía de regreso del inductor al condensador y el ciclo comienza nuevamente.

En una situación ideal donde no haya pérdida de energía este proceso se mantendrá permanentemente.



La energía total U que existe en un instante cualquiera en un circuito oscilante LC esta dada por

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

esta ecuación pone en manifiesto el hecho de que en un instante cualquiera la energía esta almacenada parcialmente en el campo magnético en el inductor y parcialmente en el campo eléctrico en el condensador. Si suponemos que la resistencia del circuito es cero, es decir no hay transformación de energía en calor por efecto Joule y U se conserva constante al transcurrir el tiempo, aun cuando varíen i y q. Esto lo podemos expresar diciendo que la variación de la energía total del sistema ideal LC con respecto al tiempo es cero. Matemáticamente lo expresamos como: $\frac{dU}{dt}=0$, reemplazando por el valor de U será:

$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=0$, derivando nos queda

$\frac{dU}{dt}=Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0$, pero tenemos que tener presente que i y q no son variables independientes sino que $i=\frac{dq}{dt}$, es decir que si derivamos esta expresión nos queda $\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$ reemplazando estos valores será:

$\frac{dU}{dt}=L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{c}q=0$ esta es la ecuación diferencial que describe las oscilaciones de un circuito LC ideal.

Esta ecuación diferencial tiene como solución es de la forma

$\frac{d^2x}{dx^2}+K=0$, cuya solución es $x=A\cos(\omega t+\theta)$, donde A es el valor máximo que toma la expresión y θ depende de las condiciones iniciales.

Si q_m es la carga máxima que puede almacenar el condensador C la solución para la ecuación del circuito LC ideal será:

$q=q_m\cos(\omega t+\theta)$, en donde ω es la frecuencia angular de las oscilaciones electromagnéticas.

Sabemos que $i=\frac{dq}{dt}$ entonces derivando la solución encontrada nos queda:

$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(q_m\cos(\omega t+\theta))}{dt}=-\omega q_m sen(\omega t+\theta)$, seguimos derivando

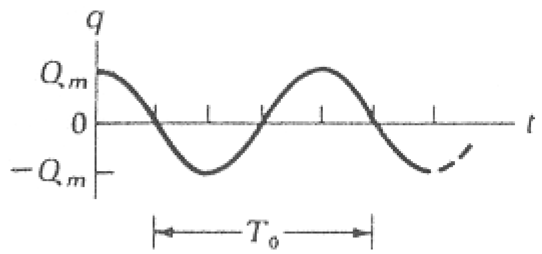
$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d(-\omega q_m sen(\omega t+\theta))}{dt}=-\omega^2 q_m\cos(\omega t+\theta)$, reemplazamos estos valores en nuestra ecuación diferencial y queda

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{c}q=-L\omega^2 q_m\cos(\omega t+\theta)+\frac{1}{c}q_m\cos(\omega t+\theta)=0$$

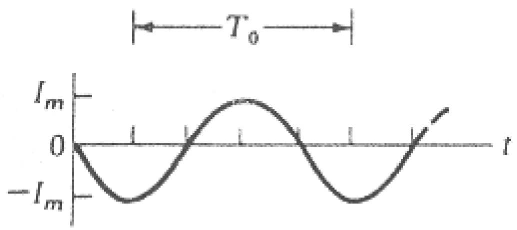
$$\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)\left(q_m\cos(\omega t+\theta)\right)=0$$

$$\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

El ángulo de fase θ queda determinado con las condiciones iniciales para $t=0$.
Los gráficos siguientes muestran el comportamiento de la carga q en el condensador C



y de la corriente i sobre el inductor

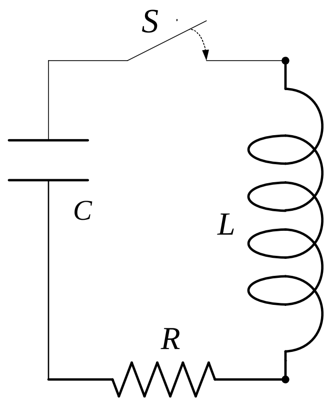


$$i=-i_m sen(\omega t)$$

Siendo $i_m=\omega q_m$

Circuito LCR

Un sistema LCR se asemeja ahora a un sistema masa-resorte amortiguado. Supongamos un circuito formado por un condensador C y una bobina L. A igual que el caso anterior realizamos el análisis considerando las energías que entran en juego. La mayor diferencia es que en este caso tenemos potencia disipada en la resistencia por efecto Joule



Le energía almacenada entre el inductor y el condensador será:

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

pero ahora $\frac{dU}{dt} = -i^2 R$

Nos queda entonces

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -i^2 R$$

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2 R$$

al igual que en el caso anterior hacemos los siguientes reemplazos

$$i = \frac{dq}{dt} \; ; \qquad \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

quedando la ecuación

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

que es la ecuación que describe las oscilaciones LC amortiguadas, siendo la solución de la ecuación diferencial, para la condición inicial en la cual el condensador carga máxima

$$q = q_m e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \theta)$$

siendo $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$