Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Dvodimenzionalni problem

U jednodimenzionalnom problemu razmatrali smo jednu veličinu x koja se mijenja u vremenu t. U praksi se češće javljaju problemi u kojima sudjeluje više medjusobno zavisnih veličina koje se mijenjaju u vremenu. Na primjer, neka su x, y dvije zavisne veličine ovisne o vremenu t. To znači da vrijednost jedne veličine utječe na vrijednost druge. Ako se ograničimo na matematičke modele zasnovane na razmatranju brzine promjene tih veličina, prema analogiji na jednodimenzionalni problem, općenito imamo sustav

$$x' = f(x, y, t),\ y' = g(x, y, t)$$

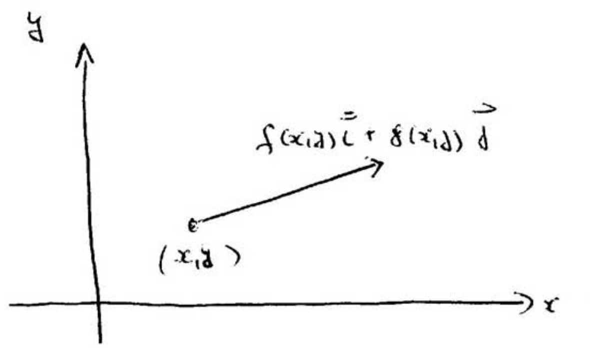
Tu je $x' := \frac{dx}{dt}$ i $y' := \frac{dy}{dt}$, a f, g su funkcije triju varijabla koje opisuju brzinu promjene od x, odnosno y u ovisnosti o x, y i t. Ako se vratimo na jednodimenzionalni slučaj, vidjet ćemo da je desna strana diferencijalnih jednadžba bila zapisana tako da ne ovisi o vremenu t. Drugim riječima, te su diferencijalne jednadžbe bile **autonomne**. To je značilo da je brzina promjene ovisila samo o vrijednosti veličine x, a ne o vremenu u kojemu je ta veličina postigla tu vrijednost. Drugim riječima, nema utjecaja evolucije (ili nekog drugog izvanjskog faktora) na populaciju. Tu treba napomenuti sljedeće. Kako su x, y funkcije od t, i njihove derivacije su funkcije od t. Automne sustave treba shvatiti kao takve kod kojih se brzine x' i y' **mogu zapisati** kao funkcije samo od x i o y. Od sada ćemo razmatrati samo **autonomne sustave**, tj. sustave oblika

$$x' = f(x, y),\ y' = g(x, y) \tag{1}$$

gdje su f, g funkcije dviju varijabla. Intuitivno, (1) shvaćamo ovako: ako su u trenutku t vrijednosti veličina x, y, onda se za mali vremenski interval Δt veličina x približno promijeni za $f(x, y)\Delta t$, a y za $g(x, y)\Delta t$.

Kao i prije, glavna je podjela na **linearne** (kada su f, g linearne funkcije) i na **nelinearne sustave** kada su neke od f, g nelinearne.

Linearni sustavi uvijek se mogu eksplicitno riješiti. To općenito ne vrijedi za nelinearne. Za grafičku predožbu rješenja (skup usmjerenja) postupimo djelomice slično kao kod jedne jednadžbe. Bitna je razlika u tomu što sve crtamo u x, y ravnini, tako da se vremenska varijabla ne vidi (dok se u jednodimenzionalnom vidi). Za svaku točku (x, y), strjelicu radimo tako da vrijednost $f(x, y)$ nanosimo horizontalno, a $g(x, y)$ vertikalno. Drugim riječima, u točki $(x(t), y(t))$ crtamo vektor $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Za razliku od jednodimenzionalnog slučaja strjelice mogu imati sva usmjerenja.



Sl 1.

Takve strjelice predočuju pripadno **vektorsko polje** sustava (1). Strjelice različitih duljina često stvaraju zbrku. To se razrješava tako da sve strjelice svedemo na jednaku duljinu, tj. da vektore normiramo. Tako dobijemo **skup usmjerenja** sustava. Time smo dobili na jasnoći, ali smo izgubili predodžbu o brzini promjene od x i y (zadržan je samo njihov odnos, koji se vidi iz nagiba strjelice).
Glavni nedostatak ovakvog prikaza (a i onog s vektorskim poljem) jest nepostojanje informacije o vremenu t. Zato je, za svaki izbor početnih vrijednosti $x(0), y(0)$ poželjno predočiti pripadnu **trajektoriju (putanju, orbitu)**

$$\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbf{R},\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0\}$$

Točka (x_0, y_0) predočuje stanje sustava za $t = 0$ (početak trajektorije), a točke $(x(t), y(t))$ stanje u vremenu t. Dakle, trajektorija predočava **život sustava**. Ako trajektoriju usmjerimo tako da se pokaže protjecanje vremena, možemo dočarati i vremensku komponentu. Intuitivno su jasne sljedeće činjenice:
1. Dvije trajektorije su jednake ili disjunktne (kao podskupovi ravnine) To znači da svaku točku trajektorije možemo izabrati kao početnu; krivulja se

neće promijeniti, samo će doći do pomaka u vremenu.
2. Svakom točkom ravnine prolazi neka trajektorija (naravno, uz razumne uvjete na f i g).
Kad je riječ o sustavima koji opisuju populaciju, prvenstveno će nas zanimati one trajektorije koje su smještene u 1. kvadrantu. Ipak, pokazuje se da je i tada problem korisno razmatrati za sve vrijednosti veličina x, y a ne samo za pozitivne. Vidjet ćemo da su naročito važne trajektorije koje se sastoje samo od jedne točke (ako postoje **stacionarne točke**), i **zatvorene trajektorije** (koje postoje ako se populacija periodno ponaša).
Sad ćemo na primjerima predočiti osnovne linearne i neke nelinearne dvodimenzionalne sustave.

Primjer 1. Opišimo sustav

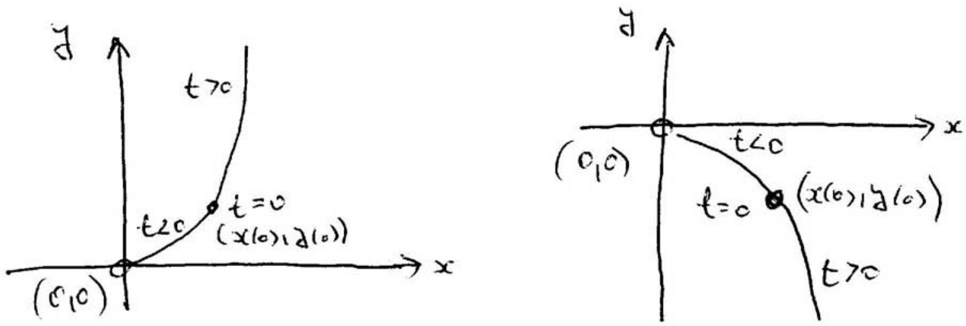
$$x' = 2x,\ y' = 3x.$$

Najprije uočimo da brzina x' ovisi samo o x, a ne o y; slično y' ovisi samo o y (iako su same veličine x, y medjusobno ovisne).
Skup usmjerenja predočimo za pozitivne $x(0)$ i $y(0)$.
Lako je vidjeti da je rješenje sustava

$$x(t) = x(0)e^{2t},\ y(t) = y(0)e^{3t}.$$

U ovom su slučaju trajektorije eksplicitno zadane, parametarskim jednadžbama, što omogućuje njihovo precizno crtanje. Naime, startajući od nekog početka $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, s jedne strane su točke za $t > 0$, a s druge za $t < 0$. Strjelicom na trajektoriji označavamo kako se točke kreću kad se t povećava (tj. što se dogadja s populacijom).

Vidimo:
(i) Točka $(0, 0)$ je stacionarna (jedina stacionarna točka). To znači jasnu činjenicu da ako je u jednom trenutku populacija bila $x = 0$ i $y = 0$, onda će stalno biti takva.
Općenito, **stacionarne točke** su rješenja sustava $x' = y' = 0$.
(ii) Stacionarna točka je **izvor**, tj. kad se t mijenja od $-\infty$ prema $+\infty$ točke trajektorija izlaze iz nje. To je pokazano strjelicama.



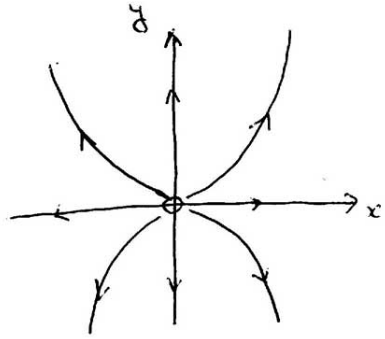
Sl. 2.

Uočite da tu nema periodnih trajektorija. Ovakvim crtežom predočili smo **fazni portret sustava**.

Napomene. (1). Potpuno bi analogna situacija bila za bilo koji sustav oblika:

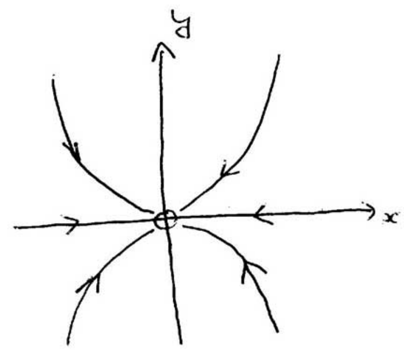
$$x' = \lambda_1 x,\ y' = \lambda_2 y$$

ako je $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (a uz nebitnu razliku ako je $0 < \lambda_2 < \lambda_1$).



Sl. 3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

(2) Analogno, ali s bitnom razlikom bilo bi za $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Naime sve bi ostalo isto osim što bi $(0,0)$ postala **ponor**, tj. sve bi trajektorije u nju ponirale (naravno, potpuno je analogna za $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.



Sl.4. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

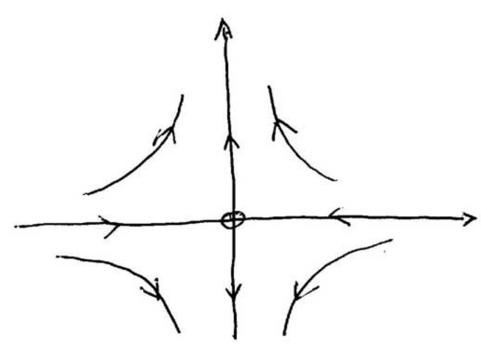
Stacionarne točke koje su izvor ili ponor zovu se **čvorovi**.
(3) Bitna promjena nastupa ako je $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (različiti predznaci), na primjer, ako je

$$x' = -2x,\ y' = 3y.$$

Tada bi rješenje bilo

$$x(t) = x(0)e^{-2t},\ y(t) = y(0)e^{3t}$$

(u 1. kvadrantu x se vremenom smanjuje, a y povećava).



Sl.5. $\lambda_1 < 0\ \lambda_2$

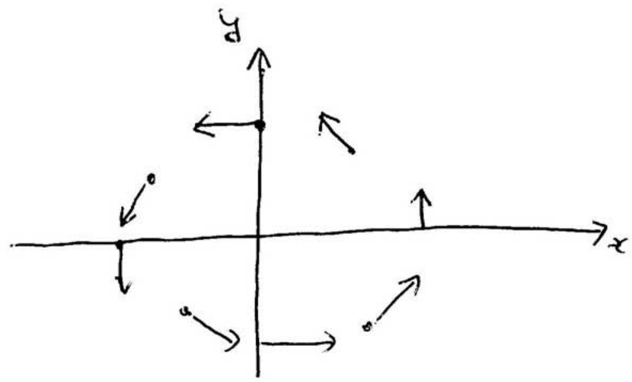
Opet je $(0,0)$ stacionarna točka, ali:
(a) Neke trajektorije uviru u $(0,0)$ (pozitivna i negativna x-zraka); zato se

x-os zove **stabilnom linijom**
(b) Neke trajektorije izviru iz $(0,0)$ (pozitivna i negativna y-zraka), zato se y-os zove **nestabilnom** linijom,
(c) Ostale trajektorije niti uviru u stacionarnu točku niti iz nje izviru; one idu prema beskonačnosti uzduž usmjerenja nestabilne linije.
Ovakva se stacionarna točka zove **sedlasta točka** ili **sedlo**.
(4) U svim ovim slučajevima fazni smo portret mogli rekonstruirati iz skupa usmjerenja, a još brže i preciznije iz eksplicitnih rješenja (parametarske jednadžbe). Medjutim, ovdje smo vezu izmedju x i y mogli zapisati eksplicitno. Na primjer, za početni sustav, iz eksplicitnog rješenja se vidi da je $(\frac{x(t)}{x(0)})^3 = (\frac{y(t)}{y(0)})^2$ (eliminirali smo vrijeme t koristeći se činjenicom da je $(e^{2t})^3 = (e^{3t})^2$). Sad dobijemo

$$y(t) = \pm y(0)\sqrt{(\frac{x(t)}{x(0)})^3}.$$

Iz ove bismo jednadžbe trajektorije mogli crtati izravno.

Primjer 2. (model privlačnosti medju dvjema osobama - model Romea i Julije) Razmotrimo sustav $x' = -ay,\ y' = bx$ za neke $a, b > 0$.
Taj sustav možemo interpretirati kao jednostavan model suodnosa dviju veličina, tako da povećavanje prve uzrokuje povećavanje druge, dok povećavanje druge uzrokuje smanjenje prve.
Govori se i o modelu privlačnosti medju dvjema osobama A i B. Naime, neka x označava količinu privlačnosti koju A osjeća prema B, a y onu koju B osjeća prema A. Naravno, pozitivne vrijednosti znače stvarnu privlačnost, negativne vrijednosti odbojnost, a vrijednost nula znači ravnodušnost.
U ovom se modelu osoba A "hladi" prema osobi B brzinom proporcionalnom količini zaljubljenosti koju B pokazuje prema A, a "zagrijava" se za nju analogno ukoliko B pokazuje odbojnost. Kod osobe B je obratno; ona se "zagrijava" za A tim više što joj je A naklonjeniji, odnosno hladi se ako A pokazuje odbojnost.
I ovaj je sustav lako izravno riješiti. Prije toga napomenimo da se može naslutiti da su trajektorije elipsasta oblika oko ishodišta $(0,0)$ koje je stacionarna točka. Na crtežu je nekoliko usmjerenja za $a = 9, b = 4$.



Sl. 6.

Riješimo sada sustav uvrštavajući derivaciju druge jednadžbe u prvu. Dobijemo

$$y'' + aby = 0$$

kojoj znamo rješenje (slučaj titranja čestice po pravcu - uvod, jednadžba (5) uz $\omega := \sqrt{ab}$):

$$y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

odakle dobijemo

$$x(t) = \frac{1}{b}y'(t) = \frac{1}{b}(D\omega\cos(\omega t) - C\omega\sin(\omega t)$$

Vidi se da je $C = y(0)$ i $D = \frac{b}{\omega}x(0)$, pa je, konačno

$$x(t) = x(0)\cos(\sqrt{ab}\cdot t) - \sqrt{\frac{a}{b}}y(0)\sin(\sqrt{ab}\cdot t$$

$$y(t) = y(0)\cos(\sqrt{ab}\cdot t) + \sqrt{\frac{b}{a}}x(0)\sin(\sqrt{ab}\cdot t).$$

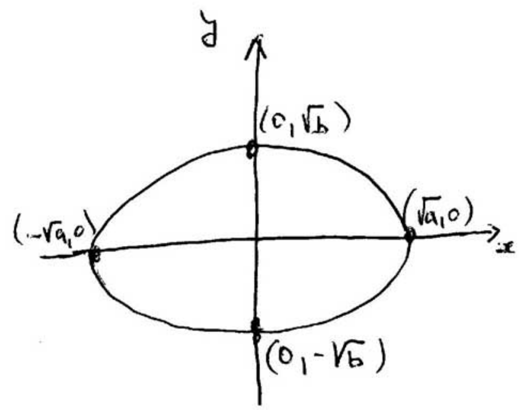
Da je riječ o elipsi vidi se iz toga što je

$$bx(t)^2 + ay(t)^2 = bx(0)^2 + ay(0)^2$$

odakle vidimo i to da je trajektorija koja prolazi točkom $(\sqrt{a}, 0)$ elipsa s jednadžbom

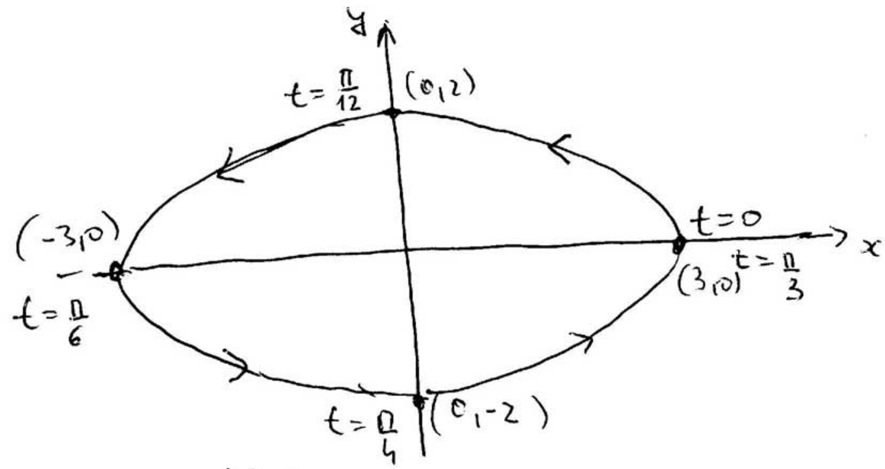
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

a to je jednadžba elipse sa središtem u ishodištu i poluosima $\sqrt{a}, \sqrt{b}$.



Sl. 7. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$

To rješenje s ovim početnim uvjetima i $a = 9, b = 4$ tumačimo ovako. U jednom trenutku (početku) A je pokazivao naklonost prema B intenziteta 3 dok je B bila ravnodušna. To je utjecalo na B tako što je postajala sve naklonjenija prema A (I kvadrant) i nakon $\frac{\frac{\pi}{2}}{6} = \frac{\pi}{12}$ vremenskih jedinica (na primjer mjeseci) pokazivala naklonost intenziteta 2, dok se za to vrijeme A hladio dok nije postao potpuno ravnodušan, a nakon toga počeo iskazivati odbojnost (II kvadrant - negativne vrijednosti od x) koja je nakon $\frac{\pi}{6}$ vremenskih jedinica bila najveća. To je utjecalo na otrježnjivanje osobe B koja je konačno opet postala ravnodušna i nakon toga počela pokazivati odbojnost (III kvadrant - negativne vrijednosti od y,a li i od x). Naravno, to je kod A utjecalo na smanjenje odbojnosti. Budući da ta odbojnost i dalje ostaje, B se nastavlja hladiti, što nakon $\frac{\pi}{4}$ vremenskih jedinica dovodi do stanja u kojemu B pokazuje najveću odbojnost, dok je A ravnodušna. Završni dio ciklusa (IV kvadrant) prolazi tako da B smanjuje intenzitet odbojnosti, ali kako ona postoji A počinje pokazivati sve veću naklonost. To završava nakon $\frac{\pi}{3}$ vremenskih jedinica u istim uvjetima kao na početku. Naravno taj se proces periodno nastavlja ponavljati.



Sl. 8.

Primjer 3. - jedan drugi model privlačnosti. Razmotrimo sustav

$$x' = by, \ y' = cx$$

za neke pozitivne b, c.
Taj suodnos dviju veličina takodjer možemo interpretirati kao jednostavan model privlačnosti (često prirodniji od onog u Primjeru 3.). Uvrštavanjem prve jednadžbe u derivaciju druge po t, dobijemo diferencijalnu jednadžbu 2. reda $y'' = bcy$ kojoj je opće rješenje

$$y(t) = \alpha\sqrt{\frac{b}{c}}e^{\sqrt{bc}t} + \beta\sqrt{\frac{b}{c}}e^{-\sqrt{bc}t},$$

za neke realne konstante α, β. Sad se lako dobije da je rješenje sustava

$$x(t) = \frac{x(0) + \sqrt{\frac{b}{c}}y(0)}{2}e^{\sqrt{bc}t} + \frac{x(0) - \sqrt{\frac{b}{c}}y(0)}{2}e^{-\sqrt{bc}t}$$

$$y(t) = \frac{y(0) + \sqrt{\frac{c}{b}}x(0)}{2}e^{\sqrt{bc}t} + \frac{y(0) - \sqrt{\frac{c}{b}}x(0)}{2}e^{-\sqrt{bc}t}.$$

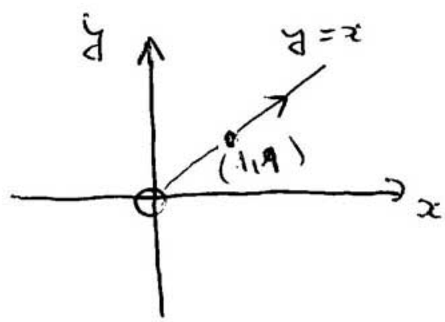
Radi jednostavnosti nastavit ćemo na primjeru za $b = c = 1$, tj na sustavu $x' = y, \ y' = x$. Uvrštavanjem dobijemo rješenje:

$$x(t) = \frac{x(0) + y(0)}{2}e^{t} + \frac{x(0) - y(0)}{2}e^{-t}; \ y(t) = \frac{x(0) + y(0)}{2}e^{t} - \frac{x(0) - y(0)}{2}e^{-t}.$$

Da dobijemo osjećaj o faznom portretu, opisat ćemo trajektorije za neke karakteristične početne vrijednosti:
Najprije uočimo da je $(0,0)$ jedina stacionarna točka.
Za $(x(0), y(0)) = (1,1)$ dobijemo

$$x(t) = e^t = y(t)$$

pa je trajektorija zraka $y = x$ u I kvadrantu koja izlazi iz ishodišta.

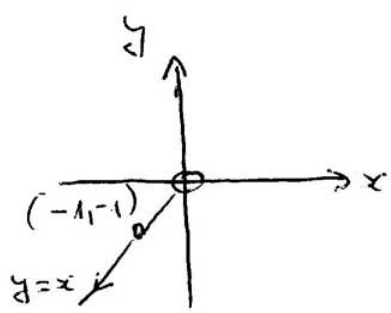


Sl. 9

Za $(x(0), y(0)) = (-1,-1)$ dobijemo

$$x(t) = -e^t = y(t)$$

pa je trajektorija zraka $y = x$ u III kvadrantu koja izlazi iz ishodišta.

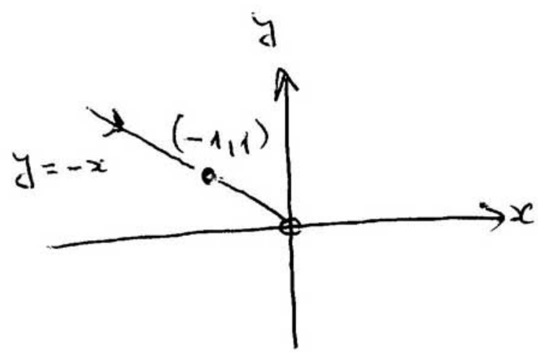


Sl. 10

Za $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$ dobijemo

$$x(t) = -e^{-t};\ y(t) = e^{-t}$$

pa je trajektorija zraka $y = -x$ u II kvadrantu koja uvire u ishodište.

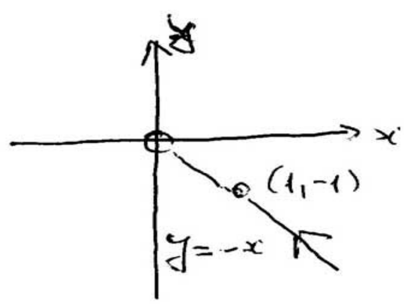


Sl. 11.

Za $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ dobijemo

$$x(t) = e^{-t};\ y(t) = -e^{-t}$$

pa je trajektorija zraka $y = -x$ u IV kvadrantu koja uvire u ishodište.

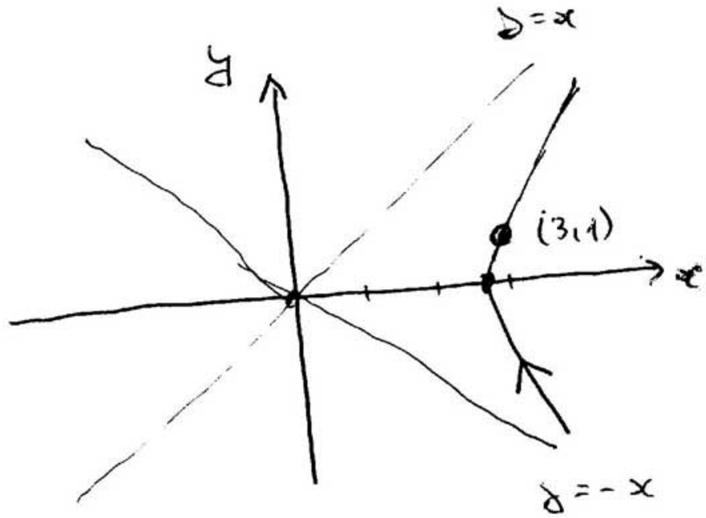


Sl. 12.

Za $(x(0), y(0)) = (3, 1)$ dobijemo

$$x(t) = 2e^t + e^{-t};\ y(t) = 2e^t - e^{-t},$$

odakle se vidi da je $x(t)^2 - y(t)^2 = 8$ pa je trajektorija grana hiperbole koja dolazi iz IV kvadranta, u $(2\sqrt{2}, 0)$ siječe $x - os$, pa prolazi kroz $(3, 1)$.

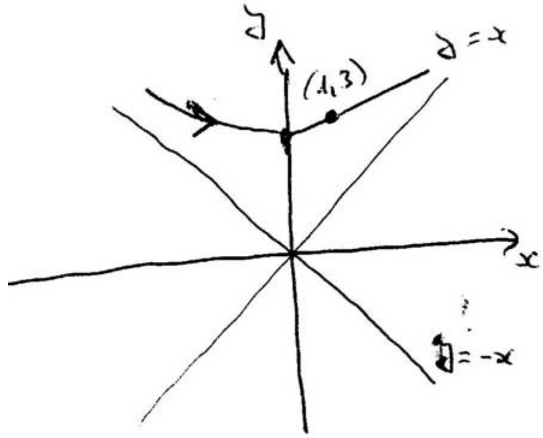


Sl. 13.

Za $(x(0), y(0)) = (1, 3)$ dobijemo

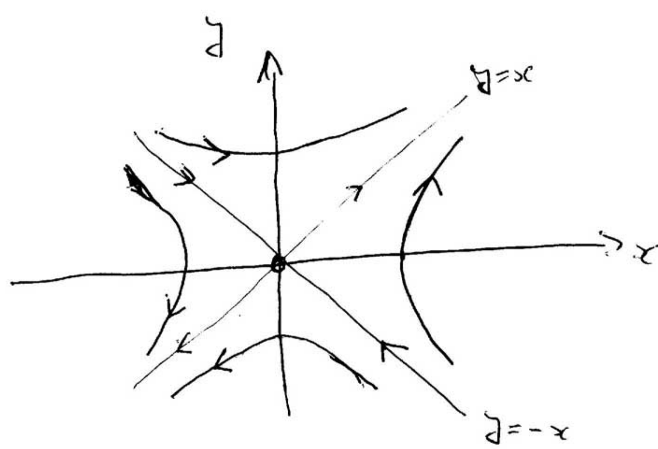
$$x(t) = 2e^t - e^{-t};\ y(t) = 2e^t + e^{-t},$$

odakle se vidi da je $x(t)^2 - y(t)^2 = -8$ pa je trajektorija grana (druge) hiperbole koja dolazi iz II kvadranta, u $(0, 2\sqrt{2})$ siječe $y - os$, pa prolazi kroz $(1, 3)$, itd.



Sl. 14.

Vidimo da je $(0,0)$ sedlo, slično kao i u Napomeni (3) iza Primjera 1. samo što je slika zarotirana (tako da ulogu koordinatnih osiju od prije sada imaju pravci $y = \pm x$).



Sl. 15

Primjer 4. Razmotrimo sustav $x' = ax + cy,\ y' = ay$ za neke realne a, c. Taj se sustav može eksplicitno riješiti. Naime, druga jednadžba ne ovisi o x, a rješenje joj je

$$y(t) = y(0)e^{at}.$$

Uvrštavanjem tog rješenja u prvu jednadžbu dobijemo nehomogenu linearnu jednadžbu $x' = ax + cy(0)e^{at}$. Njeno je rješenje

$$x(t) = x(0)e^{at} + cy(0)te^{at}.$$

Neka je, na primjer, $a = -1$ i $c = 2$. Intuitivno, riječ je o suživotu veličina x, y tako da y eksponencijalno opada (za pozitivne $y(0)$), dok x uz eksponencijalni pad (pri $x(0) > 0$) ima i rast koji se odvija brzinom proporcionalnom količini y u sustavu. Dobijemo $x(t) = x(0)e^{-t} + 2y(0)e^{-t};\ y(t) = y(0)e^{-t}$. Fazni portret predočen je samo u I kvadrantu.

U nastavku će sustavi biti nelinearni pa ih nećemo izravno rješavati (iako je katkad i to moguće).

Primjer 5. (model suživota pri kojoj jedna od veličina ometa drugu).
Razmotrimo sustav $x' = ax(1 - \frac{x}{K});\ y' = by(1 - \frac{y}{L-x})$.
Taj sustav možemo interpretirati ovako:
(I) prva jednadžba je logistička jednadžba za x (podsjetimo, tu je a približna brzina promjene od x za male x, a K je limit, odnosno kapacitet preko kojega ne može ići vrijednost od x),
(II) druga jednadžba je modificirana logistička jednadžba za y; L je kapacitet od y u uvjetima kad nema nikakvog ometanja, a $L - x$ je smanjeni kapacitet - predpostavili smo da se on linearno smanjuje s povećanjem veličine x u sustavu (naravno, moguće su i neke druge formule za promjenjivi kapacitet od y).
Dakle, u sustavu y ne ometa x, a x ometa y.
Ovaj je sustav nelinearan (obje su jednadžbe nelinearne) i egzaktno rješavanje nije izgledno. Naime, iz prve jednadžbe možemo eksplicitno odrediti x kao funkciju od t, medjutim nakon uvrštavanja u drugu dobijemo kompliciranu diferencijalnu jednadžbu (naravno, možemo je rješavati numerički).
Zato pristupamo kvalitativnom opisu rješenja. Najprije odredimo stacionarne točke. Podsjetimo, to su vrijednosti od (x, y) za koje su brzine jednake nula (pa nema nikakvih promjena). Dobijemo:

$(0,0),\ (0,L),\ (K,0)$ i možda $(K,L-K)$ (uz uvjet $L \neq K$).

Primjer 6. (Lotka-Volterrin model grabežljivca i plijena).
Razmotrimo sustav $x' = ax(1-\frac{y}{D});\ y' = -by(1-\frac{x}{C}),\ a,b,C,D > 0.$
Taj sustav možemo interpretirati kao zatvoreni sustav u kojemu y označava količinu grabežljivaca, a x plijena. Podrazumijeva se da plijen ima hrane u izobilju i kad ne bi bilo grabežljivaca, rast bi mu bio eksponencijalan u t (tj. brzina rasta bi bila linearna u x); to je dio ax u prvoj jednadžbi. Jednadžbu brzine promjene od x treba množiti faktorom $1-\frac{y}{D}$ koji je blizu 1 za male y (kad nema grabežljivaca), koji je pozitivan dok je $y < D$ (pa se plijen povećava), a negativan ako je $y > D$ (pa se plijen počinje smanjivati). Drukčije interpretirano, dio $-ax\frac{y}{D}$ predočava brzinu kojom grabežljivci uništavaju plijen (proporcionalna je i količini grabežljivaca i količini plijena).
U drugoj jednadžbi dio $-by$ dolazi od prirodnog odumiranja, a drugi dio $by\frac{x}{C}$ je brzina porasta koja je, prirodno, proporcionalna i količini grabežljivaca y i količini plijena x.
Uočite da su fiksne točke sustava $(0,0)$ i (C,D), dakle konstante C, D znače pozitivne vrijednosti od x i y pri kojima je ravnoteža u sustavu.

Primjer 7. (Lotka-Volterrin model natjecanja - dvostruki logistički model).
Razmotrimo sustav
$x' = ax(1-\frac{x}{A}-\frac{y}{B});\ y' = by(1-\frac{y}{D}-\frac{x}{C}),\ a,b,A,B,C,D > 0.$
Taj sustav možemo interpretirati kao natjecanje dviju veličina za iste resurse (na primjer dviju vrsta živih bića za isti izvor hrane).
U prvoj jednadžbi prepoznajemo ax i $1-\frac{x}{A}$ iz logističkog modela, dok dio $-\frac{y}{B}$ smanjuje brzinu porasta od x i uvjetovan je ometanjem od y.
Druga je jednadžba potpuno analogna i ima potpuno analogno objašnjenje.

Primjer 8. (Lotka-Volterrin model natjecanja s iseljavanjem).

$x' = ax(1-\frac{x}{A}-\frac{y}{B});\ y' = by(1-\frac{y}{D}-\frac{x}{C})+h,\ a,b,A,B,C,D > 0.$
Tu se populacija y iseljava konstantnom brzinom ako je $h < 0$, a useljavanje je za $h > 0$.

Neki trodimenzionalni sustavi koje svode na dvodimenzionalne - modeli širenja zaraze.

Primjer 9. - Model u kojemu se oni koji su preboljeli bolest više ne mogu zaraziti.
Neka x označava količinu onih koji se potencijalno mogu zaraziti nekom zaraznom bolešću,
y količinu zaraženih,
z količinu onih koji su preboljeli.
Razmatranje provodimo uz predpostavku da je populacije stalna, tj. da je brzina njene promjene 0, tj. da je

$$(x + y + z)' = 0. \tag{2}$$

Zarazu modeliramo sljedećim sustavom diferencijalnih jednadžba:
$x' = -\beta xy$
$y' = \beta xy - \alpha y$
$z' = \alpha y,$
za neke pozitvne parametre α, β.
Prva jednadžba govori da je brzina kojom se smanjuje broj onih koji se potencijalno mogu zaraziti u svakom trenutku proporcionalan njihovoj količini, ali i količini zaraženih zaraženih. Treća jednadžba govori da je brzina kojom se povećava broj preboljelih proporcionalna u svakom trenutku broju zaraženih. Druga jednadžba se onda dobije iz uvjeta $x' + y' + z' = 0$.
U ovom je sustavu svaka od jednažba zavisna o preostalim dvjema. Ako izostavimo treću dobijemo dvodimenzionalni sustav
$x' = -\beta xy$
$y' = \beta xy - \alpha y.$

Primjer 10. - Model u kojemu se oni koji su preboljeli bolest opet mogu zaraziti, na primjer u slučaju malarije ili tuberkuloze.
Od triju jednadžba iz Primjera 7., druga ostaje nepromijenjena. Treća jednadžba postaje $z' = \alpha y - \gamma z$ jer odredjeni postotak onih koji su preboljeli zarazu gubi imunitet i postaje dio popuklacije koja se potencijalno može zaraziti. Ako se opet zadržimo na stalnoj populaciji (uvjet $(x+y+z)' = 0$), dolazimo do sustava $x' = -\beta xy + \gamma z$
$y' = \beta xy - \alpha y$
$z' = \alpha y - \gamma z.$
I taj se sustav može svesti na dvodimenzionalan ako se uvjet stalnosti populacije napiše kao

$$x + y + z = C,$$

odakle možemo dobiti $z = C - x - y$, pa imamo
$x' = -\beta xy + \gamma(C - x - y)$
$y' = \beta xy - \gamma z.$