VAP SEM
PHY4526 : Capteurs et Communications

Capteur-Logiciel

Jose Manuel Rubio Hernán
Email: jose.rubio_hernan@telecom-sudparis.com

Département Électronique et Physique

Plan

1. Qu’est qu’un capteur-logiciel ?
2. Comment fonctionne un capteur logiciel ?
3. Théorie des observateurs
4. Modèle mathématique du phénomène physique
5. Conception d’un capteur-logiciel
6. Exercice

Capteur physique / Capteur logiciel

Capteur physique

Un capteur physique est un appareil qui mesure une grandeur physique (e.g. température) et la convertit en un signal pouvant être lu par un observateur ou par un instrument.

Capteur-logiciel (anglais : virtuel sensor or solf sensor)

Le concept de capteur logiciel consiste à associer des mesures disponibles ou facilement réalisables, représentatives de l'évolution du procédé étudié, et des modèles mathématiques reliant les grandeurs mesurées et les grandeurs à déterminer [Baya Hadid].

Capteur physique / Capteur logiciel

Capteur physique

Un capteur physique est un appareil qui mesure une grandeur physique (e.g. température) et la convertit en un signal pouvant être lu par un observateur ou par un instrument.

Capteur logiciel (observateur)

Un capteur logiciel est un "software" qui à l'aide de mesures physiques, est capable de

- prédire le comportement de la grandeur physique
- détecter des défauts des capteurs physiques
- reconstruire des données manquantes
- estimer le valeur d'une grandeur
- améliorer la précision des mesurandes

Ce software **utilise les capteurs physiques** pour prédire/estimer une grandeur spécifique.

Exemples

Navigation

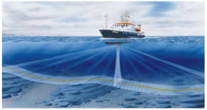
Contrôle intelligent (smart control)

Navigation aérienne

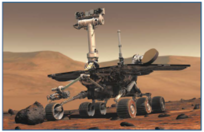
Navigation aérospatiale

Centrale Éolienne

Centrale solaire



Navigation maritime



Navigation terrestre

Centrale hydraulique

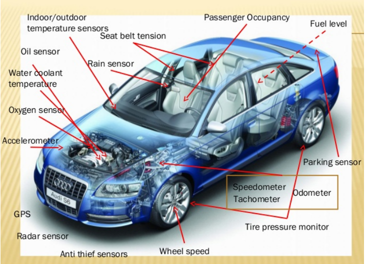
Canaux d'irrigation

Navigation pédestre

Vidéo : Canaux d'irrigation

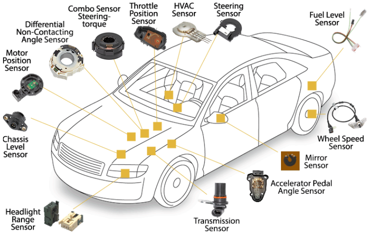
Ex. voiture

Capteurs physiques



Ex. voiture

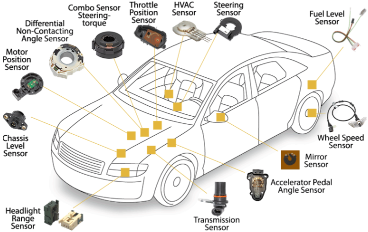
Capteurs physiques



Source : https ://www.slideshare.net/patilsanket123/ sensors -in-automobiles, Patil Sanket Sanke, 2014.

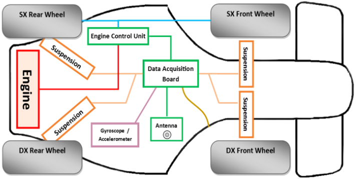
Ex. voiture

Capteurs physiques



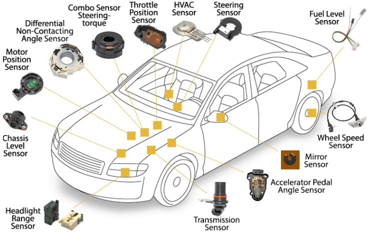
Source : https ://www.slideshare.net/patilsanket123/ sensors -in-automobiles, Patil Sanket Sanke, 2014.

Capteur logiciel



Ex. voiture

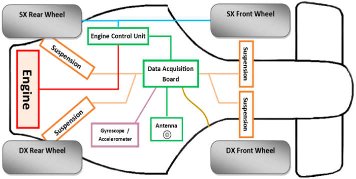
Capteurs physiques



Source : https ://www.slideshare.net/patilsanket123/ sensors -in-automobiles, Patil Sanket Sanke, 2014.

Source : Author : Editorial team Future. Customer. Image : © metamorworks – AdobeStock

Capteur logiciel



Ex. voiture

Capteurs Physiques

- gyroscope
- accéléromètre

Capteur logiciel

- modèles mathématiques
- filtre de Kalman

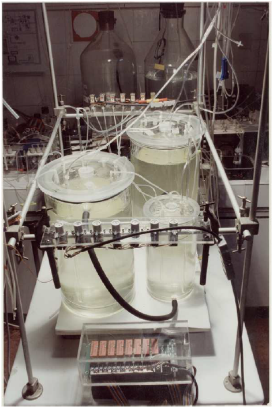
But

- estimer
  - orientation
  - vitesse linéaire
  - position

Source : Author : Editorial team Future. Customer. Image : © metamorworks – AdobeStock

Ex. mesure (croissance du phytoplacton)

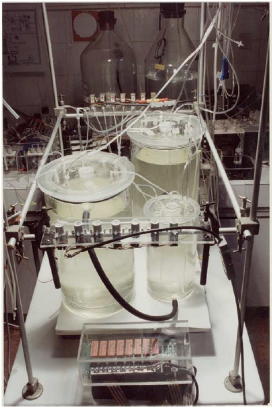
Capteurs physiques



Source : INRIA, Sophia Antipolis

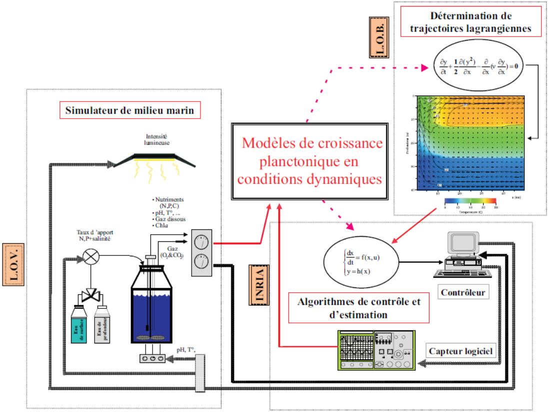
Ex. mesure (croissance du phytoplacton)

Capteurs physiques



Source : INRIA, Sophia Antipolis

Capteur logiciel



Source : INRIA, Sophia Antipolis

Ex. mesure (croissance du phytoplacton)

Capteurs physiques

- concentration en NO_3
- quota interne en azote

Capteur logiciel

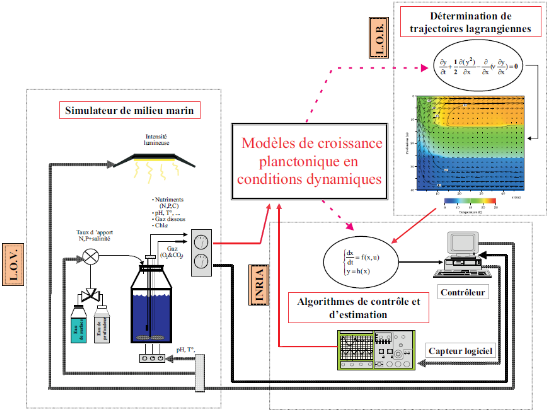
- modèles mathématiques.

▸ model

But

<u>mesure de biomasse</u>

Capteur logiciel



Source : INRIA, Sophia Antipolis

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?
   - **capteurs physiques** qui mesurent **directement** la **grandeur** voulue

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?
   - **capteurs physiques** qui mesurent **directement** la **grandeur** voulue
   - **capteurs physiques** qui mesurent des grandeurs lesquelles permettent d'**en déduire** le(s) **mesurande(s)** voulu(s)

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?
   - **capteurs physiques** qui mesurent **directement** la **grandeur** voulue
   - **capteurs physiques** qui mesurent des grandeurs lesquelles permettent d'**en déduire** le(s) **mesurande(s)** voulu(s)
3. Caractérisation et modélisation du phénomène physique

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?
   - **capteurs physiques** qui mesurent **directement** la **grandeur** voulue
   - **capteurs physiques** qui mesurent des grandeurs lesquelles permettent d'**en déduire** le(s) **mesurande(s)** voulu(s)
3. Caractérisation et modélisation du phénomène physique
4. Caractérisation et modélisation des perturbations et bruit qui peuvent affecter le phénomène physique

Comment fonctionne un capteur logiciel ?

On part de l'observation d'un phénomène physique

1. Qu'est-ce que l'on veut "mesurer / estimer" ? Quelle(s) grandeur(s) ?
2. Quels moyens on a pour mesurer le(s) grandeur(s) ?
   - **capteurs physiques** qui mesurent **directement** la **grandeur** voulue
   - **capteurs physiques** qui mesurent des grandeurs lesquelles permettent d'**en déduire** le(s) **mesurande(s)** voulu(s)
3. Caractérisation et modélisation du phénomène physique
4. Caractérisation et modélisation des perturbations et bruit qui peuvent affecter le phénomène physique
5. Résolution du problème d'estimation de la mesure en utilisant des algorithmes qui prennent en compte les modèles stochastiques identifiés (théorie des observateurs)

Avantages et désavantages

- **Avantages**

Avantages et désavantages

- **Avantages**
  1. **Améliorer la précision** d'une grandeur en travaillant en parallèle avec des capteurs physiques
  2. Estimation de mesurandes spécifiques à partir des grandeurs mesurées
  3. **Coût économique**

Avantages et désavantages

- **Avantages**
  1. **Améliorer la précision** d'une grandeur en travaillant en parallèle avec des capteurs physiques
  2. Estimation de mesurandes spécifiques à partir des grandeurs mesurées
  3. **Coût économique**
- **Désavantages**

Avantages et désavantages

- **Avantages**
  1. **Améliorer la précision** d'une grandeur en travaillant en parallèle avec des capteurs physiques
  2. Estimation de mesurandes spécifiques à partir des grandeurs mesurées
  3. **Coût économique**
- **Désavantages**
  1. Il faut trouver le **modèle mathématique du phénomène physique**
  2. Il faut trouver le **modèle de bruit et des perturbations** qui peuvent affecter le phénomène physique
  3. Il faut aussi des **capteurs physiques** pour mesurer les grandeurs directement liées à la grandeur estimée

Théorie des observateurs (1/3)

Estimation [Kalman, 1960]

La théorie de l'estimation est basée sur la célèbre contribution de Kalman aux problèmes de filtrage et prend en compte les problèmes induits par le bruit.

Théorie des observateurs (1/3)

Estimation [Kalman, 1960]

La théorie de l'estimation est basée sur la célèbre contribution de Kalman aux problèmes de filtrage et prend en compte les problèmes induits par le bruit.

Observation [Luenberger, 1971]

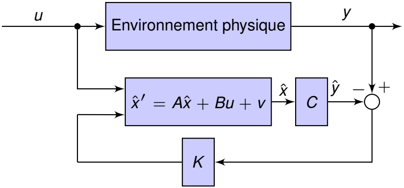
La théorie des observateurs a été développée par Luenberger pour les systèmes linéaires. Elle a été développée dans un cadre déterministe (c.-à-d., elle ne prend pas en compte les effets du bruit).

- Sa contribution a été de mieux développer l'algèbre linéaire sous-jacente afin de montrer comment réduire la complexité dynamique de l'observateur.

Théorie des observateurs (2/3) : définitions [1]

Entrées du système physique (commandes) : *u(t)*

Actions qui s'exercent sur le système.



Théorie des observateurs (2/3) : définitions [1]

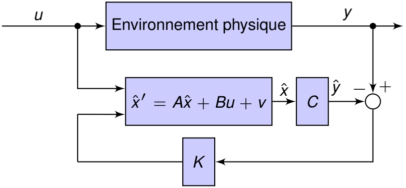
Entrées du système physique (commandes) : *u(t)*

Actions qui s'exercent sur le système.

Variables d'état : *x(t)*

Elles sont un outil mathématique destiné à faciliter l'étude d'un système. Mais souvent elles ont une interprétation physique directe.

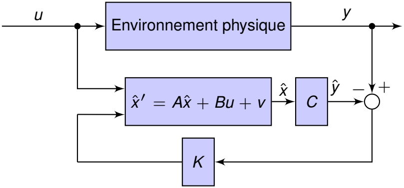
- **Vecteur d'état** : *mémoire minimal* nécessaire pour la prédiction du comportement future.



Théorie des observateurs (3/3) : définitions [1]

Sortie du système physique (observation) : *y(t)*

Comportement observé. La sortie ne consiste pas en toutes les variables d'état du système, mais seulement en certain(s) d'entre elles ou en combinaison(s) d'icelles.



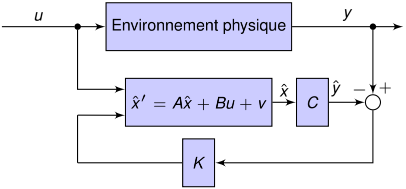
Théorie des observateurs (3/3) : définitions [1]

Sortie du système physique (observation) : *y(t)*

Comportement observé. La sortie ne consiste pas en toutes les variables d'état du système, mais seulement en certain(s) d'entre elles ou en combinaison(s) d'icelles.

Dimension d'un système

Le nombre de ses entrées *e* et le nombre de ses sorties *s* $\rightarrow$(e x s)
La dimension (*n*) du vecteur d'état = nombre de variables d'état ! ! ! ! ! !
Attention : *n* , n'est pas la dimension du système



Type de systèmes

Système continu

Système évoluant de façon continue. Ce système est régi par des équations différentielles

Type de systèmes

Système continu

Système évoluant de façon continue. Ce système est régi par des équations différentielles

Système récurrent ou discrète

Système évoluant par étapes discrètes. Ce système est régi par des équations récurrentes ou discretes

- $x(j) = x(jT)$ où T est le pas de récurrence. D'une manière analogue au cas continu, il est utilisé k.

Type de systèmes

Système continu

Système évoluant de façon continue. Ce système est régi par des équations différentielles

Système récurrent ou discrète

Système évoluant par étapes discrètes. Ce système est régi par des équations récurrentes ou discretes

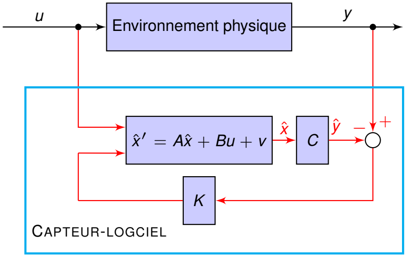
- $x(j) = x(jT)$ où T est le pas de récurrence. D'une manière analogue au cas continu, il est utilisé k.

Systèmes continus	Systèmes récurrents ou discrèts
Dérivation $\frac{d}{dt}$	Accroissement du pas $k \rightarrow k+1$
Intégration $\int dx$	Retard $\frac{1}{z}$
Équation différentielle	Équation récurrente

Schèma du filtre de Kalman dans un système

Entrées et sorties :

- u : entrée(s) du système (commande(s))
- $\hat{x}'$: état estimé (prévisionnel)
- $\hat{x}$: état estimé avec la correction de Kalman
- y : sortie(s) (mesure(s))
- $\hat{y}$: sortie(s) estimée(s) (estimation)
- $r = y - \hat{y}$: résidu / innovation



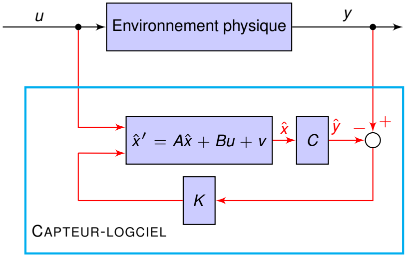
Schèma du filtre de Kalman dans un système

Matrices du système :

- Équations d'état : A, B, C, D
- Q : covariance du bruit du processus
- R : covariance du bruit de la mesure
- K : gain de Kalman
- P'_k : covariance de l'erreur *a priori*
- P_k : covariance de l'erreur *a posteriori*
- I : matrice identité

Entrées initiales du capteur logiciel :

- x_0 : état initial du système
- P_0 : covariance de l'erreur initiale



Modèle mathématique du phénomène physique

Il y a trois approches pour construire le capteur-logiciel :

1. Modélisation du système physique à partir de lois physiques
2. Modélisation statistique multivariée
3. L'intelligence artificielle (IA)
   - réseaux de neurones
   - fuzzy logic
   - méthodes hybrides

Exemple : modéle mathématique d'un pendule

◂ KF exemple

Équation du pendule simple

Application du principe fondamental de la dynamique $\phi | \ sin(\phi) \equiv \phi$.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\phi = \frac{1}{ml^2}u$$

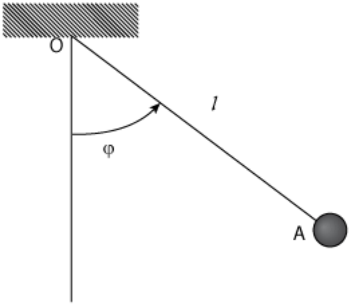


FIGURE – Pendule simple

$y = \phi =$ mesure de Position angulaire
$u =$ torque appliquée en entrée

Exemple : modéle mathématique d'un pendule

Équation d'état du pendule

1. Changement de variable

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}$$

2. On calcule

$$\dot{x}_1 = \dot{\phi} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\phi} = -\frac{g}{l}x_1 + \frac{1}{ml^2}$$

3. Équation d'état (1/2)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = Ax + Bu$$

4. Équation d'état (2/2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

5. Équation d'observation (1/2)

$$y = Cx + D$$

$$y = \phi$$

6. Équation d'observation (2/2)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

A = Matrice d'évolution *B = Matrice d' application de la commande*
C = Matrice d'observation *D = Matrice de transmission directe*

Conception de un capteur-logiciel

Étapes

1. Collecte et filtrage de données
2. Sélection de la structure du modèle (et des variables)
3. Identification du modèle
4. Validation du modèle
5. **Création du capteur logiciel (observateur)**

Important

Chaque capteur logiciel doit être dédié à un équipement spécifique, car il repose sur des variables et sur des modèles mathématiques qui sont fortement dépendants de la physique du système.

Filtre de Kalman

Création d'un capteur-logiciel avec le filtre de Kalman

- estimer et prédire une grandeur physique
- améliorer la précision des mesurandes

Important

- le filtre de Kalman utilise le modèle préalablement identifié
- il faut estimer le bruit et les perturbations qui peuvent affecter le phénomène physique

Types de filtres de Kalman

- filtre de Kalman linéaire (KF)
- filtre de Kalman étendu (EKF)
- *unscented* filtre de Kalman (UKF)

Filtre de Kalman linéaire (KF) [2]

Filtre de Kalman Linéaire

1. Le filtre de Kalman utilise *state space techniques*. On doit avoir la représentation d'état du phénomène physique :

$$\text{temps discret : } \begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned}$$

$$\text{temps continue : } \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned}$$

$w_k = N(0, Q)$ –> bruit du processus
$v_k = N(0, R)$ –> bruit de mesure.

Filtre de Kalman linéaire (KF) [2]

Filtre de Kalman Linéaire

1. Le filtre de Kalman utilise *state space techniques*. On doit avoir la représentation d'état du phénomène physique :

$$\text{temps discret : } x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$$
$$y_k = Cx_k + v_k$$

$$\text{temps continue : } \frac{\partial x}{\partial t} = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

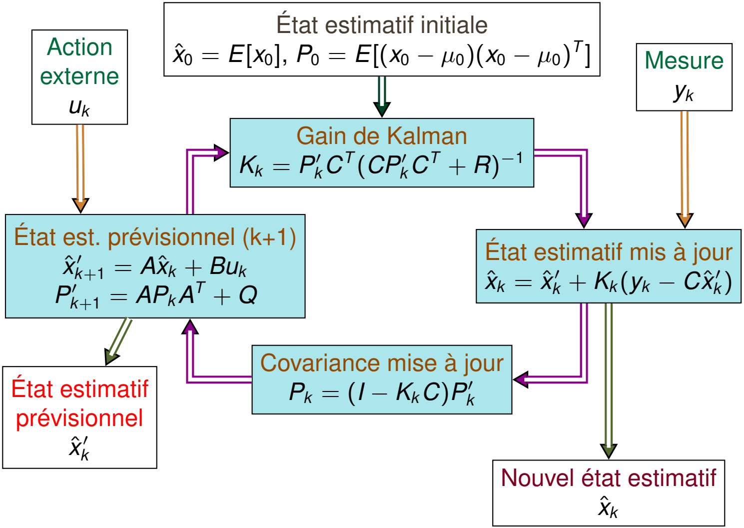
$w_k = N(0, Q)$ –> bruit du processus
$v_k = N(0, R)$ –> bruit de mesure.

2. Algorithme récursif de filtre de Kalman

$$\hat{x}'_k = A\hat{x}'_{k-1} + Bu_k + w_k$$
$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k \underbrace{(y_k - C\hat{x}'_k)}_{\text{Residu/ Correction}}$$

Residu = Terme de correction

Filtre de Kalman linéaire (KF)



Filtre de Kalman étendu (EKF) [3]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Représentation d'état du phénomène physique :

temps discret : $x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k$
$$y_k = h(x_k) + v_k$$

temps continue : $\dfrac{\partial x}{\partial t} = f(x(t), u(t)) + w(t)$
$$y(t) = h(x(t)) + v(t)$$

$f(\cdot)$,$h(\cdot)$ –> processus/état et observation
$w_k = N(0, Q_k)$ –> bruit du processus
$v_k = N(0, R_k)$ –> bruit de mesure

Filtre de Kalman étendu (EKF) [3]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Représentation d'état du phénomène physique :

   temps discret : $$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k$$
   $$y_k = h(x_k) + v_k$$

   temps continue : $$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x(t), u(t)) + w(t)$$
   $$y(t) = h(x(t)) + v(t)$$

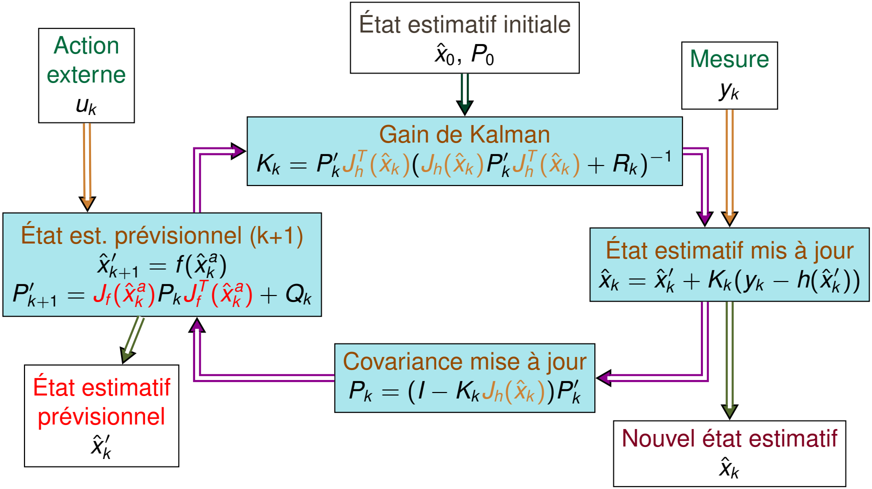
   $f(\cdot)$,$h(\cdot)$ –> processus/état et observation
   $w_k = N(0, Q_k)$ –> bruit du processus
   $v_k = N(0, R_k)$ –> bruit de mesure

2. Algorithme récursif de filtre de Kalman

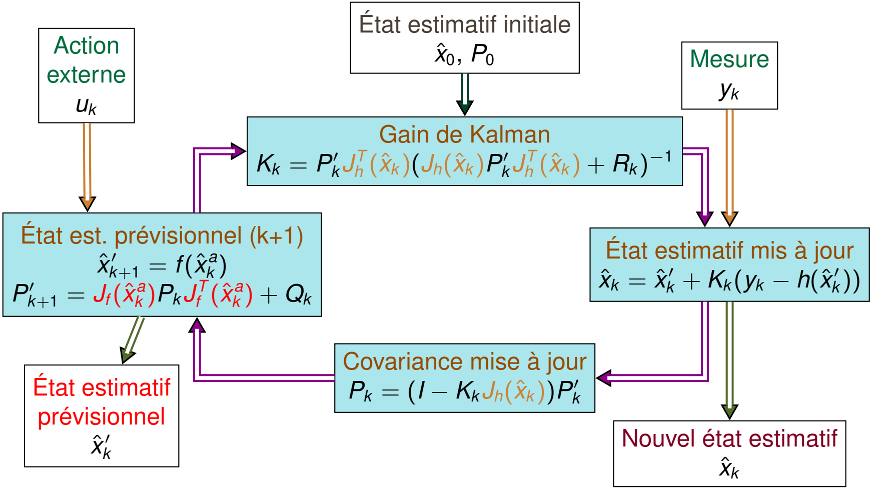
   $$\hat{x}'_k = f(\hat{x}'_{k-1}, u_k) + w_k$$
   $$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k \underbrace{(y_k - h(\hat{x}'_k))}_{\text{Residu}}$$

TELECOM SudParis

Filtre de Kalman étendu (EKF)



Filtre de Kalman étendu (EKF)



$J_f(x^a_k)$ = Matrice jacobienne de $f(\cdot)$, $J_h(x^a_k)$ = Matrice jacobienne de $h(\cdot)$

Unscented filtre de Kalman (UKF) [4]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Différences entre EKF et UKF ?

Unscented filtre de Kalman (UKF) [4]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Différences entre EKF et UKF ?
   - **pas de dérivées (derivative-free) :**
     UKF utilise une approche d'échantillonnage déterministe

Unscented filtre de Kalman (UKF) [4]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Différences entre EKF et UKF ?
   - **pas de dérivées (derivative-free) :**
     UKF utilise une approche d'échantillonnage déterministe
   - **points sigma :**
     la distribution des états est représentée à l'aide d'un ensemble minimal de points d'échantillonnage

Unscented filtre de Kalman (UKF) [4]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Différences entre EKF et UKF ?
   - **pas de dérivées (derivative-free) :**
     UKF utilise une approche d'échantillonnage déterministe
   - **points sigma :**
     la distribution des états est représentée à l'aide d'un ensemble minimal de points d'échantillonnage
2. Étapes :

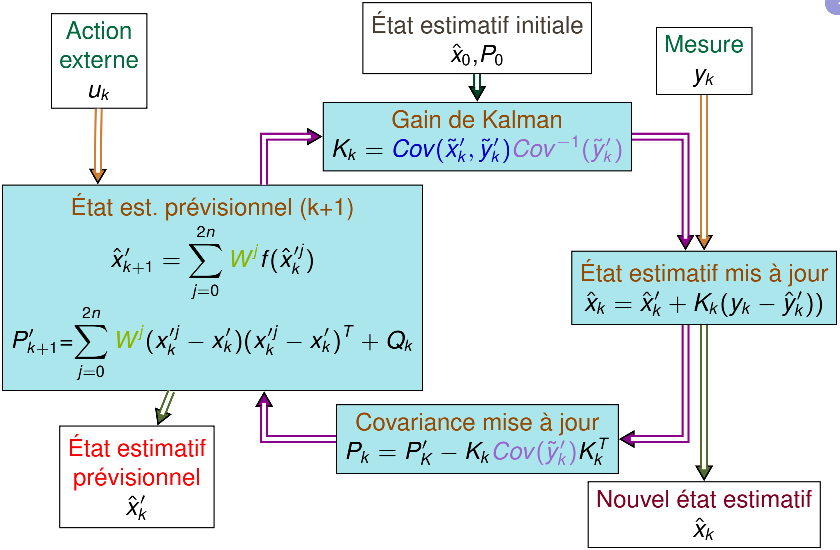
Unscented filtre de Kalman (UKF) [4]

Filtre de Kalman non-linéaire

1. Différences entre EKF et UKF ?
   - **pas de dérivées (derivative-free) :**
     UKF utilise une approche d'échantillonnage déterministe
   - **points sigma :**
     la distribution des états est représentée à l'aide d'un ensemble minimal de points d'échantillonnage
2. Étapes :
   - **sélection des points sigma :**
     méthode de calcul –> Unscented Transformation (UT)
   - prévision du modèle
   - assimilation des données

Unscented filtre de Kalman (UKF)

Explication



Résumé

	Caractéristiques	Cible	Problèmes
Filtre de Kalman (KF)	■ filtre linéaire ■ optimale	■ systèmes linéaires	■ représentation des incertitudes
Filtre de Kalman Étendu (EKF)	■ filtre non-linéaire ■ série de Taylor ■ jacobienne	■ systèmes non-linéaires	■ incertitude supplémentaire ■ performance (convergence lente) ■ instabilité
Filtre de Kalman ***Unscented*** **(UKF)**	■ filtre non-linéaire ■ points sigma pondérés ■ transformation *Unscented* (UT) ▸ détails	■ systèmes non-linéaires	■ incertitude supplémentaire ■ convergence plus rapide ■ pas optimale

Exemple : pendule simple

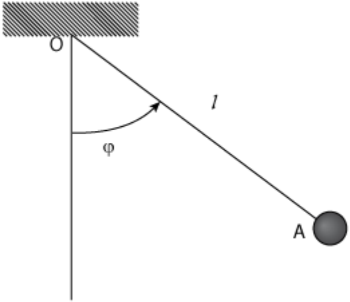


FIGURE – Pendule simple

$y = \phi =$ mesure de Position angulaire.
$u =$ torque appliquée en entrée

1. Conditions :
   - ϕ : mesure avec du bruit
   - pas de frottement
   - ϕ : petit –> $\sin(\phi) \equiv \phi$ (équation linéaire)
2. Matrices de la représentation d'état (équation linéaire) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

3. But : estimer la position angulaire du pendule en utilisant le filtre de Kalman :
   - équation linéaire : Kalman filter

Exemple : pendule simple

Équations

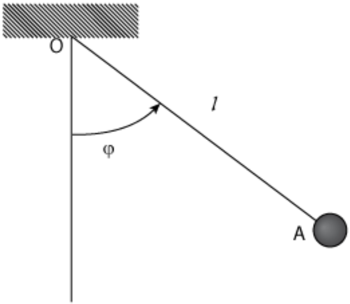


FIGURE – Pendule simple

$y = \phi =$ mesure de Position angulaire.
$u =$ torque appliquée en entrée

1. Conditions :
   - ϕ : mesure avec du bruit
   - pas de frottement
   - ϕ : petit –> $\sin(\phi) \equiv \phi$ (équation linéaire)
2. Matrices de la représentation d'état (équation linéaire) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

3. But : estimer la position angulaire du pendule en utilisant le filtre de Kalman :
   - équation linéaire : Kalman filter
   - équation non-lineaire : EKF et UKF
     ϕ : non petit –> équation non-linéaire

Exercice 1 : Centrale à inertie (1/3)

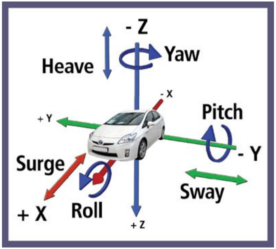
Centrale à inertie (mouvement selon l'axe X) : instrument de mesure de l'accélération et de la vitesse angulaire composé de trois accéléromètres et de trois gyroscopes.

Exercice 1 : Centrale à inertie (1/3)

Centrale à inertie (mouvement selon l'axe X) : instrument de mesure de l'accélération et de la vitesse angulaire composé de trois accéléromètres et de trois gyroscopes.

Capteurs

- **accéléromètre :** accélérations bruitées
- **gyroscope :** vitesses angulaires bruitées et biaisées



Inertial Measurement Unit (IMU)

Problème
le gyroscope possède un biais évoluant dans le temps
on ne connait pas la forme de la dérive.

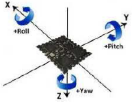
Défi
estimer l'angle d'inclinaison ainsi que la vitesse angulaire du mobile

Exercice 1 : Centrale à inertie (2/3)

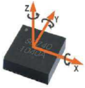
Objectif : estimer l'angle du mobile, sa vitesse angulaire ainsi que le biais du gyroscope à l'aide d'un accéléromètre et d'un gyroscope

Exercice 1 : Centrale à inertie (2/3)

Objectif : estimer l'angle du mobile, sa vitesse angulaire ainsi que le biais du gyroscope à l'aide d'un accéléromètre et d'un gyroscope



Gyro
- biased
- noisy



Accelero
- unbiased
- noisy
- sensitive to gravity

Inertial Measurement Unit (IMU)

Hypothèses avant modélisation :

- le mobile ne subit aucune accélération
- les bruits des deux capteurs sont gaussiens (bruits blanc)
- l'accéléromètre nous revoie des valeurs d'accélérations en m/s^2
- le gyroscope nous renvoie des valeurs de vitesses angulaires en rad/s
- le biais du gyroscope est nul à l'instant initial

Exercice 1 : Centrale à inertie (3/3)

Questions

1. Modéliser le problème en fonction des paramètres à estimer et des mesures des capteurs (temps d'échantillonage (2.5ms)).
2. Dessiner le filtre de Kalman pour la centrale à inertie.
3. Chercher les meilleures valeurs pour le bruit du processus et le bruit de la mesure (Q=eye(2), $R = [10^{-1}, 10^6]$).

TELECOM SudParis

Exercice 1 : Centrale à inertie (Note 1/2)

Angles d'inclinaison : Roll (selon l'axe x), **Pitch (selon l'axe y)** et Yaw (selon l'axe z).

α = vraie valeur de l'angle d'inclinaison
b_{acc}= bruit de l'accéléromètre
b_{gyro}= bruit du gyro
B = biais du gyro
$\dot{\alpha}$ = vraie valeur de la vitesse angulaire
α_M = angle d'inclinaison obtenu à partir des mesures de l'accéléromètre
u = vitesse angulaire mesurée par le gyroscope

Système

$$\alpha_M = \alpha + b_{acc}$$
$$u = \dot{\alpha} + B + b_{gyro}$$

On suppose

- le biais du gyro constant : $B_{k+1} = B_k$
- la vitesse angulaire du mobile fixe : $\dot{\alpha}_{k+1} = \dot{\alpha}_k$
- $\alpha_{k+1} = \alpha_k + t_e\dot{\alpha}_k$: inclinaison du mobile en fonction de la vitesse angulaire à l'instant précédent (t_e : période d'échantillonnage)

Exercice 1 : solution (1/2)

Note

- **Acc. :** angle d'orientation, $\alpha_M = \arctan\left(\frac{-Ax}{\sqrt{Ay^2+Az^2}}\right)$
- **Gyro :** angle d'orientation du mobile (intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps) (mesure pas très précise)

Système

$$\alpha_{M,k} = \alpha_k + b_{acc,k}$$
$$u_k = \dot{\alpha}_k + B_k + b_{gyro,k}$$

Si $\alpha_{k+1} = \alpha_k + t_e\alpha_k$. Si on ne prends pas en compte le bruit : $\alpha_{M,k} = \alpha_k$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + t_e\dot{\alpha}_k$$
$$u_k = \dot{\alpha}_k + B_k$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \alpha_k + t_e(u_k - B_k)\\ &= \underbrace{\alpha_k - t_eB_k}_{\text{état}} + t_eu_k\end{aligned}$$

Exercice 1 : solution (1/2)

Système

$$\alpha_{M,k} = \alpha_k + b_{acc,k}$$
$$u_k = \dot{\alpha}_k + B_k + b_{gyro,k}$$

Alors

$$\alpha_{k+1} = \underbrace{\alpha_k - t_e B_k}_{\text{état}} + t_e u_k$$
$$B_{k+1} = B_k$$

Représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_e \\ 0 \end{bmatrix} u_k + w_k, \qquad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ B_k \end{bmatrix} + v_k$$

Note : $y_k = \alpha_{M,k} = \alpha_k$

Exercice 1 : solution (2/2)

Représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_e \\ 0 \end{bmatrix} u_k + w_k , \qquad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ B_k \end{bmatrix} + v_k$$

Paramètres du modèle du Kalman filtre

- $\mathbf{x_k}$: angle qui va être estimé
- $\mathbf{B_k}$: bias qui va être estimé
- $\mathbf{w_k}$: bruit du processus
- $\mathbf{v_k}$: bruit de la mesure
- y_k **:** angle mesuré (dérivé de l'accéléromètre)

dt : temps d'échantillonage (2.5ms)

Bibliographie

[1] J.-C. Gille and M. Clique, *Systèmes lineaires, équations d'état*, vol. 1. Eyrolles, 1984.

[2] T. E. Lacey, "Tutorial : the kalman filter 11.1 introduction 11.2 mean squared error," 1998.

[3] T. L. *, H. Bruyninckx, and J. D. Schutter, "Kalman filters for non-linear systems : a comparison of performance," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 7, pp. 639–653, 2004.

[4] E. A. Wan and R. V. D. Merwe, "The unscented kalman filter," in *Kalman Filtering and Neural Networks*, pp. 221–280, Wiley, 2001.

[5] L. Jaulin, *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes*, vol. 1. Hermes Science Publications, 2005.

[6] R. Longchamp, *Commande numérique de systèmes dynamiques*, vol. 1 et 2. PPUR, 4 ed., 2015.

[7] Y. Granjon, *Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu,à temps discret, représentation d'état*, vol. 1. DUNOD, 2 ed., 2010.

[8] J.-C. Gille and M. Clique, *La représentation d'état pour l'étude des systèmes dynamiques. Tome 1 et 2*, vol. 1 et 2. Eyrolles, 1975.

Ex : capteur-logiciel Mathématiques modèle

CL Ex2

Modèle de Droop

$$(\Sigma_R)\begin{cases} \dot{x} = a_2(1-\frac{1}{q})x - Dx \\ \dot{q} = a_3\frac{s}{a_1+s} - a_2(q-1) \\ \dot{s} = D(S_{in}-s) - \frac{s}{a_1+s}x \\ y = x_1 \end{cases}$$

avec: x : biomasse

q : quota cellulaire en azote

s: concentration en nitrate

Transformation *unscented*

◂ Résumé

Voici les étapes que la transformation *unscented* effectue :

1. Calculer un ensemble de points sigma
2. Attribuer des poids à chaque point sigma
3. Transformer les points par une fonction non linéaire
4. Calculer la distribution gaussienne à partir de points pondérés et transformés
5. Calculer la moyenne et la variance de la nouvelle gaussienne

Équation du filtre de Kalman *Unscented* [4]

◂ UKF

- poids des points sigma

$$X_{k-1} = \{(x^j_{k-1}, W^j) | j = 0 \cdots 2n\}, \qquad \text{n = dimension de la représentation d'état}$$

$$W^j = \frac{1 - W^0}{2n}, \qquad \forall j = 1 \cdots 2n, \qquad \sum_{j=0}^{2n} W^j = 1$$

- observations estimées et sa moyenne

$$\hat{y}'^j_k = h(\hat{x}^j_k), \qquad \hat{y}'_k = \sum_{j=0}^{2n} W^j \hat{y}'^j_k$$

- covariance (innovation covariance) de $\tilde{y}'_k = y_k - \hat{y}'_k$

$$Cov(\tilde{y}'_k) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (y'^j_k - y'_k)(y'^j_k - y'_k)^T + R_k$$

- covariance croisée entre $\tilde{x}'_k = x_k - \hat{x}'_k$ et $\tilde{y}'_k$

$$Cov(\tilde{x}'_k, \tilde{y}'_k) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x'^j_k - x'_k)(y'^j_k - y'_k)^T$$

Exercice 1 : plus d'information (Note 2/2)

On peut écrire ces équations sous la forme matricielle $Y = HX + B$ que l'on appelle l'équation de mesure :

Y = vecteur de mesure, **X** = vecteur d'état
B = vecteur de bruit, **H** = matrice d'observation

Équation ($Y = HX + B$)

$$\begin{bmatrix} u \\ \alpha_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \alpha \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{acc} \\ b_{gyro} \end{bmatrix}$$

Équation ($X_{k+1} = AX_k$)

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \alpha \\ B \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \alpha \\ B \end{bmatrix}_k$$