Variable Compleja

Teoria, problemas resueltos y propuestos

Dr. Carlos Lizama

Universidad de Santiago de Chile

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática y C.C.

Introducción

El presente texto de apuntes de Variable Compleja corresponde al curso del mismo nombre (hoy Cálculo IV) impartido por el autor a la carrera de Ingeniería Matemática durante varios semestres consecutivos.

Agradecimientos a Daniela Vilches, quien logró dar forma casi-final a estos apuntes durante el primer y segundo semestres del 2012.

Santiago, Marzo 2013.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

La primera noción de un número complejo fue descubierta en conexión con resolver ecuaciones cuadráticas.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación $z^2 + 1$. Obviamente, esta no tiene soluciones reales, ya que para cualquier real x, $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 1 > 0$.

La idea es escribir, formalmente, $z = \pm\sqrt{-1}$; pero no existe número real cuyo cuadrado de -1. Luego, si la ecuación tiene una solución, debe ser en un sistema de números mayor que el conjunto de los números reales.

Este fue el problema planteado a matemáticos por alrededor de 700 años: Extender los reales a un sistema mayor de números en el cual la ecuación $z^2 + 1$ puede tener una solución.

C. Gauss (1780-1840) fue el primer matemático en usar sistemáticamente números complejos. La serie Hipergeométrica

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1 \cdot 2}x^2 + ...$$

Se comprende mejor al analizar los complejos $\mid x \mid < 1$. (Note que si $b = c$ y $a = 1$ se obtiene la serie geométrica).

Gauss Demostró:

"Toda ecuación $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 = 0$ tiene n-soluciones en $\mathbb{C}$".

A. L. Cauchy dió la estructura central al desarrollo de variable compleja a través de la idea de la integral de línea:

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

la cual da sentido a la fórmula integral de Cauchy: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.

1.2. Propiedades algebraicas

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un cuerpo con la suma y el producto definido de la siguiente forma:

$\mathbb{C} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)\}$.

$\mathbb{C} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (a,b)(c,d) = (ac-bd, bc-ad)\}$.

Las unidades aditivas y multiplicativas son $(0,0)$ y $(1,0)$, respectivamente. Veamos:

$$(a,b) + (0,0) = (a,b)$$

y

$$(a,b)(1,0) = (a,b).$$

Además, cada elemento no cero, tiene inverso. Para (a,b), su inverso es $(-a,-b)$. Definimos $i = (0,1)$, entonces podemos escribir el par (a,b) de la siguiente forma:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + ib.$$

Esta es la notación que se ocupará desde ahora. Bajo la suma y producto, $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo.

Observación 1 *Consideremos $i = (0,1)$, entonces:*

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1.$$

Luego, $i^2 = -1$.

Como $i^2 = -1$, la ecuación $z^2 + 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En efecto:

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

Más generalmente:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Si $z = a \in \mathbb{R}$ y $w = b \in \mathbb{R}$, entonces (para $a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

con lo cual se tiene una fórmula para el recíproco de un número complejo.

Notación 2

$\overline{z} = a - ib$ es el *conjugado* de $z = a + ib$

$\mid z \mid = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ es el *valor absoluto* de z.

Con las notaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mid z \mid^2}, \qquad \text{si } z \neq 0$$

Definición 3 *Si $z = a + ib$, diremos que a es la parte real de z y escribimos: $a = Re(z)$. Análogamente, diremos que b es la parte imaginaria de z y escribimos: $b = Im(z)$*

En consecuencia, $z = Re(z) + iIm(z)$. Del mismo modo, podemos escribir el conjugado de z en función de su parte real e imaginaria, es decir, $\overline{z} = Re(z) - iIm(z)$.
Además, podemos escribir la parte real e imaginaria en función de z y $\overline{z}$. Sumando, se obtiene: $Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$.
Por otro lado, restando, se tiene: $Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
Note además que $Re(z) \leq\mid z \mid$ y $Im(z) \leq\mid z \mid$.

Propiedades Básicas

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

2. $\overline{\overline{z}} = z$

3. $\overline{wz} = \overline{wz}$

4. $\mid zw \mid=\mid z \mid\mid w \mid$

5. $\mid \overline{z} \mid=\mid z \mid$

Proposición 4 ***(Desigualdad Triangular)***

$$\mid z + w \mid\leq\mid z \mid + \mid w \mid$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mid z+w\mid^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} \\
&= \mid z\mid^2 +2Re(z\overline{w})+\mid w\mid^2 \\
&\leq \mid z\mid^2 +2\mid z\overline{w}\mid+\mid w\mid^2 \\
&= \mid z\mid^2 +2\mid z\mid\mid w\mid+\mid w\mid^2 \\
&= (\mid z\mid+\mid w\mid)^2
\end{aligned}$$

∎

1.3. Representación Geométrica

En el caso de la forma polar tenemos que $\cos\theta = \dfrac{a}{r} \Rightarrow$ y $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, entonces, $a = r\cos\theta$ y $b = r\sin\theta$. Se observa que $r =\mid z\mid$. Y definimos $\theta = Arg(z)$. El problema en general es que $Arg(z)$ es una función multivariable. De esta forma, tendremos que elegir un rango de valores admisibles para θ.

Propiedad: $Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$.

Demostración. Sea

$$z = a+ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) =\mid z\mid(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Entonces, consideramos

$$z =\mid z\mid(\cos\theta + i\sin\theta)$$

y

$$w = \mid w \mid (\cos\phi + i\sin\phi).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
zw &= \mid z \mid\mid w \mid (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= \mid z \mid\mid w \mid (\cos(\theta)\cos(\phi) + i\sin(\phi)\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)) \\
&= \mid z \mid\mid w \mid [(\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)) + i(\sin(\phi)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\phi))] \\
&= \mid z \mid\mid w \mid [\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)]
\end{aligned}$$

Entonces: $Arg(zw) = \theta + \phi = Arg(z) + Arg(w)$. ∎

Consideremos las siguientes figuras:

Definición 5 *Definimos* $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ *como la ecuación exponecial. También se puede escribir como cis*(θ) *o exp*(θ)*.*

Consideremos $f(\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Sea $\theta = 0$, entonces, $f(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$.
Además

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\phi) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \\ &= f(\theta+\phi). \end{aligned}$$

Entonces, cualquier función que cumpla estas dos propiedades se llama ecuación de Abel y se escribe como:

$$f(x) = e^{kx}.$$

Propiedades función exponencial

1. $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$

2. $e^{(i\theta)\alpha} = e^{i\theta\alpha}$

3. $e^{(i\theta)\frac{1}{n}} = e^{i\theta\frac{1}{n}}$

4. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

5. $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$

Una propiedad interesante de la función exponcial y que ayuda a encontrar las raíces de una ecuación es:

$$e^{2ki\pi} = 1 \qquad ,\forall z \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, una forma de resolver la ecuación $z^n = 1$, es hacer lo siguiente:

$$z^n = 1 = e^{2ki\pi}.$$

Por lo tanto

$$z = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$

Otra propiedad interesante es:

$$\begin{aligned} z^n &= w \\ &= \mid w \mid e^{iArg(w)} \\ &= \mid w \mid e^{iArg(w)e^{2ki\pi}} \\ &= \mid w \mid e^{i(Arg(w)+2k\pi)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$z = w^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(Arg(w)+2k\pi)}{n}}.$$

1.4. Ecuación del Círculo y de la Recta

$$
\begin{aligned}
\mid z - z_0 \mid = r \quad &\Leftrightarrow \quad \mid z - z_0 \mid^2 = r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + (\mid z \mid^2 - r^2) = 0
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación de un círculo en el plano complejo es:

$$z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + \alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora la ecuación de una recta. Sabemos que la ecuación de una recta es: $y = mx + n$. Si consideramos $x = Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $y = Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. Y reemplazando estos valores en la ecuación nos queda:

$$
\begin{aligned}
&\frac{z - \overline{z}}{2i} = m\frac{z + \overline{z}}{2} + n \\
\Leftrightarrow \quad & z - \overline{z} = im(z + \overline{z}) + 2in \\
\Leftrightarrow \quad & z - \overline{z} = imz + im\overline{z} + 2in \\
\Leftrightarrow \quad & z - imz - \overline{z}im - \overline{z} - 2in = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z(1 - im) - \overline{z}(1 + im) - 2in = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z(m + i) + \overline{z}(m - i) + 2n = 0
\end{aligned}
$$

Si hacemos $z_0 = m - i$, $\overline{z_0} = m + i$ y $\beta = 2n$, lo que se obtiene es la ecuación de la recta:

$$z\overline{z_0} + \overline{z}z_0 + \beta = 0.$$

1.5. Proyección Estereográfica

Si consideramos $f(z) = \frac{1}{z}$ y con $z = 0$, se obtiene $f(0) = \infty$. Con esto se define el siguiente conjunto: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ecuaciones de la proyección

1. Dado B determinar $Q = \pi(B)$

   Sea $L : t(0,0,1) + (1-t)(u,v,w)$,tratemos de encontrar t_0 tal que la recta anterior, L, intersecta al plano complejo. La recta la podemos reescribir como:

   $$L : ((1-t)u, (1-t)v, t + (1-t)w).$$

   Buscamos t_0 tal que:

   $$\begin{aligned} t_0 + (1-t_0)w = 0 \;&\Leftrightarrow\; t_0 + w - wt_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{-w}{1-w} = \frac{w}{w-1}, \qquad w \neq 1 \\ &\Leftrightarrow\; 1 - t_0 = 1 - \frac{w}{w-1} = \frac{w-1-w}{w-1} = \frac{1}{1-w} \end{aligned}$$

   Por lo tanto $Q = \pi(B)$ es :

   $$Q = (\frac{1}{1-w}u, \frac{1}{1-w}v, 0)$$

2. Dado A determinar P(A)

   $$L : t(0,0,1) + (1-t)(x,y,0).$$

Encontramos t_0 tal que la recta L intersecta a la esfera. Esto es:

$$[(1-t)x]^2 + [(1-t)y]^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 = 1 - t^2 = (1-t)(1+t) \qquad /\frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)(x^2+y^2) = 1+t$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2) - t(x^2+y^2) = 1+t$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-1 = t[1+x^2+y^2]$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Luego:

$$1 - t_0 = 1 - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \frac{2}{x^2+y^2+1}$$

Por lo tanto P(A) es:

$$P(A) = (\frac{2x}{x^2+y^2-1}, \frac{2y}{x^2+y^2-1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}).$$

Si hacemos $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$, de donde se tiene:

$$\frac{z-\overline{z}}{i} = 2y = -i(z-\overline{z}) = i(\overline{z}-z).$$

Entonces:

$$P(A) = (\frac{z+\overline{z}}{\mid z \mid^2 +1}, \frac{-i(z-\overline{z})}{\mid z \mid^2 +1}, \frac{\mid z \mid^2 -1}{\mid z \mid^2 +1}).$$

1.6. Topología en $\mathbb{C}$

La forma común de calcular la distancian en $\mathbb{C}$ es:

$(\mathbb{C}, d)$, con d = distancia, que es $d(z, w) =\mid z - w \mid$

Otras formas son:

$$d_1(z, w) = \frac{\mid z - w \mid}{1+ \mid z - w \mid}$$

y

$$d_1(z, w) \leq 1$$

$$d_2(z, w) = \frac{2 \mid z - w \mid}{[(1+ \mid z \mid^2)(1+ \mid w \mid^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

Conceptos

1. **Convergencia de una sucesión:** Dada $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$, entonces $z_n \to L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid z_n - L \mid < \varepsilon$.

2. $\mathbb{C}$ **es completo** (Toda sucesión de Cauchy converge).

   En efecto: Sea $z_n \subseteq \mathbb{C}$ sucesión de Cauchy. Entonces $\mid z_n - z_m \mid \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

   $\mid x_n \mid = \mid Re(z_n) \mid \leq \mid z_n \mid$ y entonces, $\mid x_n - x_m \mid \leq \mid z_n - z_m \mid \to 0$.

   Además

   $\mid y_n \mid = \mid Im(z_n) \mid \leq \mid z_n \mid$ entonces, $\mid y_n - y_m \mid \leq \mid z_n - z_m \mid \to 0$.

   De aquí se tiene que: $x_n \subseteq \mathbb{R}$ y $y_n \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ que sabemos es completo. Luego, existen $x_0, y_0 \subseteq$

$\mathbb{R}$ tales que:

$$x_n \to x_0$$

y

$$y_n \to y_0$$

Por lo tanto:

$$z_n \to x_o + iy_0.$$

3. **Función Continua:** $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f es continua en z_0 si:

$$z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Ejemplo 6 1. Funciones cotinuas.

2. $f(z) = Re(z)$, $g(z) = Im(z)$.

3. $f(z) = \overline{z}$.

4. $p(z, \overline{z}) = \sum_{n,m} a_{n,m} z^n (\overline{z}^m)$.

5. $\dfrac{p(z, \overline{z})}{q(z, \overline{z})}$ es continua en el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / q(z, \overline{z}) \neq 0\}$.

6. Dominio: Es unn abierto conexo.

1.7. Funciones Básicas

1. **Traslación:** $f(z) = z + b; b \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ll} f(0) = b & f(t) = t + b \\ f(1) = 1 + b & f(b) = 2b \\ f(2) = 2 + b & f(1 + b) = 1 + 2b \end{array}$$

2. **Dilatación o Contracción:** $f(z) = kz; k \in \mathbb{R}; k > 0$

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = a$$
$$f(i) = ia$$

3. **Rotación:** $f(z) = e^{i\theta}z; \theta \in \mathbb{R}$

$$f(i) = e^{i\theta} \qquad f(0) = 0$$
$$f(1) = e^{i\theta}$$
$$f(t) = te^{i\theta}$$

4. **Inversión:** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$\begin{array}{ll} f(1) = 1 & f(it) = \frac{-i}{t} \\ f(t) = \frac{1}{t} & f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} \end{array}$$

5. **Transformaciones de Möbius o lineales fraccionales**

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \qquad ad-bc \neq 0; a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Esta función tiene inversa, $f^{-1}(z) =?$ para encontrarla se ocupa la transformación de Möbius.

T. de Möbius $\leftrightarrow$ Matrices invertibles 2x2

$$\frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se invierte la matriz y queda como: $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \dfrac{1}{ad-bc}$.

Entonces: $f^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$. Y además se tiene que $(f \circ f^{-1})(z) = z$.

Proposición 7 Una transformación de Möbius es la compuesta de traslacioes, dilataciones, rotaciones e inversiones.

Demostración. $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d}$

$$\begin{aligned} z &\to \mid c \mid z \to \mid c \mid e^{iArg(c)} z \\ &= cz \to cz + b \to \frac{1}{cz+d} \to \mid \frac{bc-ad}{c} \mid \frac{1}{cz+d} \to \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} \to \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Entonces: $S(z) = (T \circ R \circ D \circ I \circ T \circ R \circ D)(Z)$.

■

Proposición 8 Una transformación de Möbius está únicamente determinada por la imagen de tres puntos distintos.

Demostración.

- Unicidad: Sean S y T transformaciones de Möbius tales que:

$$S(z_1) = w_1 \qquad T(z_1) = w_1 \to z_1 = T^{-1}(w_1)$$

$$S(z_2) = w_2 \qquad T(z_2) = w_2 \to z_2 = T^{-1}(w_2)$$

$$S(z_3) = w_3 \qquad T(z_3) = w_3 \to z_3 = T^{-1}(w_3)$$

  Por demostrar: S = T

  En efecto, ya que S y T son invertibles, tenemos:

$$S(T^{-1}(w_1)) = w_1 \to (S \circ T^{-1})(w_1) = w_1$$

$$S(T^{-1}(w_2)) = w_2 \to (S \circ T^{-1})(w_2) = w_2$$

$$S(T^{-1}(w_3)) = w_3 \to (S \circ T^{-1})(w_3) = w_3$$

  Por lo tanto $S \circ T^{-1}$ tiene 3 puntos fijos. Los puntos fijos de:

$$(S \circ T^{-1})(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

Son soluciones de la ecuación:

$$az + b = z(cz + d) \;\Leftrightarrow\; az + b = cz^2 + dz$$

$$\Leftrightarrow\; cz^2 + z(d - a) - b = 0$$

que son a lo más 2.

Para que tenga más de 2 puntos fijos, la Transformación de Möbius que sirve es $T(z) = z = Id(z)$. Entonces:

$$S \circ T^{-1} = Id \Rightarrow S = T.$$

- Existencia: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distintos. Sea:

$$S(z_1) = w_1$$

$$S(z_2) = w_2$$

$$S(z_3) = w_3$$

Cuánto es $S(z)$, para cualquier z?

Comentarios:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \qquad (c \neq 0)$$

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \qquad T^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c} \Leftrightarrow T(\frac{-d}{c}) = \infty$$

Basta encontrar una Transformación que lleve z_1 en 0, z_2 en 1 y z_3 en ∞

$$T(z) = z - z_1, \qquad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = 1)$$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \qquad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = z_2 - z_1)$$

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \qquad (\quad a = z_2 - z_3, b = -z_1(z_2 - z_3)$$
$$, \quad c = z_2 - z_1, d = -z_3(z_2 - z_1))$$

Luego:

$$W(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3}\frac{(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)}$$

Luego, la transformación de Möbius buscada es:

$$S(z) = (W^{-1} \circ T)(z)$$

■

Teorema 9 *Una Transformación de Möbius lleva círculos o rectas en círculos o rectas.*

Demostración. Sea C un círculo con ecuación

$$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + k_0 = 0; \qquad k_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$$

Consideremos las funciones básicas:

1. $T(z) = z + b$

2. $T(z) = az; \qquad a \in \mathbb{C}, a = re^{i\theta}$

3. $T(z) = \dfrac{1}{z}$

Si $z = w - b$, el crculo queda como:

$$
\begin{aligned}
& (w-b)\overline{(w-b)} + \overline{\alpha}(w-b) + \alpha\overline{(w-b)} + k_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} - w\overline{b} - b\overline{w} + b\overline{b} + \overline{\alpha}w - \overline{\alpha}b + \alpha\overline{w} - \alpha\overline{b} + k_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} + (-\overline{b} + \overline{\alpha})w + (-b + \alpha)\overline{w} + b\overline{b} - (\overline{\alpha}b + \alpha\overline{b}) + k_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} + (-\overline{b} + \overline{\alpha})w + (-b + \alpha)\overline{w} + b\overline{b} - 2Re(\overline{\alpha}b) + k_0 = 0
\end{aligned}
$$

Si $w = az$, entonces la fórmula anterior queda:

$$
\begin{aligned}
& \frac{w}{a}\frac{\overline{w}}{a} + \alpha\frac{w}{a} + \alpha\frac{\overline{w}}{a} + k_0 = 0 \qquad /a\overline{a} \\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} + \overline{\alpha a}w + k_0 a\overline{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & w\overline{w} + \overline{\alpha a}w + k_0 \mid a\overline{a} \mid = 0
\end{aligned}
$$

Si $w = \dfrac{1}{z}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \overline{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\overline{w}} + k_0 = 0 \qquad /w\overline{w} \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \overline{\alpha w} + \alpha w + k_0 w\overline{w} = 0
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si $k_0 = 0$, entonces la transformación lleva el círculo a una recta. Por otro lado, si $k_0 \neq 0$, entonces lo transforma en un círculo. ∎

Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja

2.1. Funciones analíticas

Definición 10 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida en un abierto en el plano y $z_0 \in \Omega$. Se dice que $f(z)$ es derivable en z_0 (u holomorfa o analítica) si existe el límite:*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Observación 11 Una función f se dice analítica en un abierto Ω si es analítica en cada punto de Ω.

Observación 12 Es fácil ver que si f es holomorfa en z_0 entonces f es continua en z_0.

Ejemplo 13 1) $f(z) = a, a \in \mathbb{C}$. Calculamos el cuociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{a - a}{z - z_0} = 0$$

Tomando el límite $z \to z_0$, se obtiene $f'(z_0) = 0$. Esta función, es la función constante.

2) $f(z) = z$. f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 1$.

3) $g(z) = z^n$, n entero positivo.

Calculamos el cuociente

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + ... + z_0^{n-1}$$

Tomando el límite $z \to z_0$, obtenemos $g'(z_0) = nz_0^{n-1}$

4) Sea $h(z) = \overline{z}$, Vamos a ver que no es derivable en $z_0 = 0$. Queremos ver si existe o no

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

Si el límite existe, debe ser el mismo, no importa como nos aproximamos a 0.

Para $z \in \mathbb{R}$, $z = t$, tenemos $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t} = 1$.

Para z imaginario, $z = it$, tenemos $\lim_{t \to 0} \dfrac{-it}{it} = -1$.

Por lo tanto h no es analítica en $z = 0$.

Ejercicio 14 Demuestre que $f(z) = |z|^2$ es derivable sólo en $z_0 = 0$.

Sea $(\mathbb{AF}, +, \cdot, \circ)$ el conjunto de las funciones analíticas con la suma, el producto y la composición. Dadas f y g funciones analticas, entonces:

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

$$(f \circ g)(z) = f(g(z))$$

Donde los resultados son también funciones analíticas. Entonces, de aquí se desponde el siguiente teorema.

Teorema 15 *Si f y g son derivables, entonces:*
1) $(f + g)' = f' + g'$

2) $(fg)' = f'g + fg'$

3) $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$ *cuando* $g \neq 0$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ *cuando* $g \neq 0$

Demostración.

1) Tenemos

$$\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

Si tomamos el límite para $z \to z_0$ obtenemos la fórmula.

2)

$$\frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}g(z)+f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

Tomamos el límite para $z \to z_0$ y usamos el hecho de que g es continua en z_0, obteniendo

$$f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

3) Usando 2)

$$0=\left(g\frac{1}{g}\right)'=g'\frac{1}{g}+g\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$$

4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}+f\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

■

Corolario 16 *Toda función racional* $r(z) = \dfrac{a_n z^n + ... + a_0}{b_m z^m + ... + b_0}$ *es derivable en el abierto* $\Omega = \{z : b_m z^m + ... + b_0\}$ *. En particular, la función* $\dfrac{1}{z}$ *es derivable en* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Ejemplo 17 Sea $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $ad - bc = 1$. g es derivable, excepto en $z_0 = \dfrac{-d}{c}$, además:

$$g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

En efecto,

$$g'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Definición 18 *Diremos que* $f(z)$ *es derivable en* $z_0 = \infty$ *si la función* $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, *es derivable en* $t_0 = 0$.

Observación. Lo anterior también se puede hacer para funciones continuas.

Ejemplo 19

$$f(z) = \frac{z+2}{3z^2-1}$$

Tenemos

$$g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{3}{t^2}-1} = \frac{t+2t^2}{3-t^2}$$

luego $g'(t) = \dfrac{(1+4t)(3-t^2)+2t(t+2t^2)}{(3-t^2)^2}$, de donde $g'(0) = \dfrac{1}{3}$.
Por lo tanto $f'(0) = \dfrac{1}{3}$

Teorema 20

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

Demostración.

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

∎

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se dice que f es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una transformación lineal L tal que:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = L(x-x_0, y-y_0) + e(x-x_0, y-y_0)$$

en que:

$$\frac{e(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$$

cuando $x \to x_0$ y $y \to y_0$, esto es, el error es pequeño comparado con la norma. Observar que $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cuya matriz, con respecto a las bases canónicas, es:

$$[L] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

La prueba del siguiente resultado se ve usualmente en cursos de cálculo por lo que no se mostrará aqui.

Teorema 21 *Si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existen y son continuas en* (x_0, y_0) *entonces* f *es diferenciable en ese punto.*

La siguiente es una de las principales caracterizaciones de funciones analiticas.

Teorema 22 *(Ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sea* $f = u + v$ *una función diferenciable en* $z_0 = (x_0, y_0)$*. Entonces* f *es holomorfa en* z_0 *si y sólo si se cumplen las ecuaciones:* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\partial v}{\partial x}$ *en el punto* (x_0, y_0)*.*

Demostración.

($\Rightarrow$)Por definición, se tiene que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t}$$

equivalentemente

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(z_0+t)+iv(z_0+t)-u(z_0)-iv(z_0)}{t}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0} \frac{u(z_0+it)+iv(z_0+it)-u(z_0)-iv(z_0)}{t}$$

o bien

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{u(z_0+t)-u(z_0)}{t}+i\frac{v(z_0+t)-v(z_0)}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{u(z_0+it)-u(z_0)}{t}+\frac{iv(z_0+it)-v(z_0)}{t}\right].$$

Observar que cuando $t \to 0$

$$\frac{u(z_0+t)-u(z_0)}{t} = \frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$

y

$$\frac{u(z_0+it)-u(z_0)}{t} = \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Reemplazando, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right].$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

($\Leftarrow$) Como f es diferenciable, existe

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

tal que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + e(x - x_0, y - y_0),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right] \\ &+ e_1(x - x_0, y - y_0) + ie_2(x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\begin{aligned} &f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(y - y_0) \\ &+i\left[-\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(y - y_0) + e(x - x_0, y - y_0)\right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(z - z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(z - z_0) + e(x - x_0, y - y_0)$$

Entonces

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+\frac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}$$

Tomamos el límite cuando $z \to z_0$, y nos queda

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}+\lim_{z\to z_0}\frac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}$$

Ya que $\lim_{z\to z_0}\frac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}=0$, se obtiene que existe $f'(z_0)$ lo cual concluye la demostración.

$\blacksquare$

Observación 23

De la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ &= i\left[\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right] \end{aligned}$$

Otra expresión para $f'(z)$ es la siguiente: Ya que $f(z)=u(z)+iv(z)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z)=\frac{\partial u}{\partial y}(z)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z) \tag{2.2}$$

Haciendo (2.1)-i(2.2), se obtiene finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z)$$

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right]$$

Ejercicio 24 *1) Pruebe que en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como* $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ *y* $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = r\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

2) Pruebe que en notación compleja las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Definición 25 *Sea* $p : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$*, p se dice armónica si*
$\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$.

Notación: $\Delta p := \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ se le llama el Laplaciano de p.

Proposición 26 *Si* $f = u + iv$ *es analítica, entonces* u *y* v *son armónicas.*

Demostración.

Debemos probar por definición que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$. Como f es analítica, entonces: $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

Como $f = u + iv$, entonces: $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}} = 0$. Así, $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}} = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

De esto se puede concluir que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$.

■

Ejercicio 27

1) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Demuestre que f no puede ser la parte real o imaginaria de una función analítica.

2) Pruebe que si f es analítica y u es armónica, entonces $f \circ u$ es armónica.

2.2. Algunas funciones de variable compleja.

I. **Función exponencial.** Se define como:

$$e^z := e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Propiedades

1) e^z es una función analítica en $\mathbb{C}$.

2) $(e^z)' = e^z$

3) $e^0 = 1$, $e^{2\pi in} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$

4) $e^{z+w} = e^z e^w$

5) $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

6) $|e^{iy}| = 1$, $|e^z| = e^x$

Teorema 28 *La única solución de la ecuación* $f' = hf$; $h \in \mathbb{C}$ *y* $f(0) = A \in \mathbb{C}$ *es:*

$$f(z) = Ae^{hz}$$

Demostración. Solución: $f'(z) = Ahehz = hf(z)$. Demostremos la unicidad de la solución. Sea g que satisface $g' = hg$ con $g(0) = A$. Considerando:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{kfg - hgf}{g^2} = 0.$$

Entonces $\dfrac{f}{g}$ es constante. Pero: $\dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{A}{A} = 1$. Por lo tanto $f = g$.
■

II. **Funciones trigonométricas.** Se definen como:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Propiedades

1) $(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z$

2) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

3) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

4) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Teorema 29 *Las soluciones de la ecuación $f'' + kf = 0$; $k \in \mathbb{C}$ son de la forma: $f(z) = A\cos(\sqrt{k}z) + B\sin(\sqrt{k}z)$.*

Demostración. Calculamos la primera y la segunda derivada de f:

$$f'(z) = -A\sqrt{h}\sin z\sqrt{h} + B\sqrt{h}\cos z\sqrt{h}$$

$$f''(z) = -A\sqrt{h}\sqrt{h}\cos z\sqrt{h} - B\sqrt{h}\sqrt{h}\sin z\sqrt{h} = -hf(z)$$

Con lo que queda demostrado el teorema. ■

III. **Función raíz enésima** Se define como:

$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \qquad z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, $r > 0$, $n = 1, 2, 3, ...$

Proposición 30 *$\sqrt[n]{z}$ es analítica en Ω.*

Demostración. Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Considerando $u(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}}\cos\dfrac{\theta}{n}$ y $v(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}}\sin\dfrac{\theta}{n}$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n-1}}\cos\frac{\theta}{n} \leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-r^{\frac{1}{n}}}{n}\sin\frac{\theta}{n} \leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n-1}}\sin\frac{\theta}{n}.$$

■

IV. **Funciones hiperbólicas** Se definen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico como sigue:

$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Propiedades

1) $(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z$

2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

3) $\cosh(z+w) = \cosh z \cos w + \sinh z \sinh w,\ \sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \sinh z \cosh w$

4) $\sinh(iz) = i \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z$

Teorema 31 *Las soluciones de la ecuación* $y'' = ky$; $k \in \mathbb{C}$ *son de la forma:* $y(z) = A\cosh(\sqrt{k}z) + B\sinh(\sqrt{k}z)$.

V. **Función logaritmo.** Se define la función logaritmo como:

$$\ln z = \ln r + i\theta,$$

para $r > 0$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Propiedades

1) La función logaritmo es analítica en Ω.

2) $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$

3) $e^{\ln z} = z$, para todo $z \in \Omega$.

VI. **Función potencia.** La función potencia se define como:

$$z^w = e^{w \ln z},$$

para cada $w \in \Omega$.

Propiedades

1) La función potencia es analítica en Ω.
2) $\dfrac{d(z^w)}{dz} = wz^{w-1}$

Ejemplo: Calcular i^i.

Solución: Aplicando la definición de la función logaritmo, queda: $\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$ Entonces $i^i = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{-\pi}{2}}$

Ejercicio 32 *Calcule* i^{i^i}.

Capítulo 3

Series

3.1. Series de Taylor

El siguiente es el resultado básico en series de potencias.

Teorema 33 *Considerar* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *y sea* $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})}$ *el radio de convergencia. Entonces,*

(a) Para cada $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z - z_0| < R$*, la serie converge (absolutamente).*

(b) Para cada $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z - z_0| > R$*, la serie diverge.*

(c) La serie converge uniformemente en subconjuntos compactos (cerrado y acotado) del disco $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \ |z - z_0| < R\}$

Teorema 34 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *convergente en* $D(0, R)$*. Entonces* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *es analítica en* $D(0, R)$*, y además* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *la* *cual es también convergente en $D(0,R)$.*

Demostración.

Analicemos la siguiente diferencia:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^n\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z_0^{n-1}\right|$$

$$+ \left|\sum_{n=1}^{N} n a_n z_0^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right|$$

$$+ \left|\frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z-z_0}\right|$$

El primer término tiende a cero cuando z tiende a z_0, ya que es la derivada del polinomio

$$p(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

El segundo término tiende a cero cuando N tiende a infinito, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ converge, lo que demostraremos más adelante.

Para el tercer término se tiene que:

$$\left|\frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right|$$

Pero,

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + z^{n-3} z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + |z|^{n-3}|z_0|^2 + \cdots + |z_0|^{n-1}$$

Existe un $r < R$, tal que,

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leq r^{n-1} + r^{n-2} r + r^{n-3} r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leq n r^{n-1}$$

Luego

$$\left|\frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \to$$

0, cuando $N \to \infty$

Ahora veamos que si $h(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, entonces $h'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$, con radio de convergencia R para ambas series.

Si $R = \dfrac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|}}$ es el radio de convergencia de $h(r)$ y R' el radio de convergencia de $h'(r)$, entonces

$$R' = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ converge en $D(0, R)$:

$$R' = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

■

Ejemplo 35 Si $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge en $\mathbb{C}$, esto es $R = \infty$, entonces f es analítica en $\mathbb{C}$, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

Haciendo $m = n - 1$, tenemos:

$$f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

De lo anterior se puede observar que, $f'(z) = f(z)$ y $f(0) = 1$, entonces $f(z) = e^z$ y por lo tanto,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Observación. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
Sea $g(z) = f'(z)$, entonces

$g'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$

Sea $h(z) = g'(z)$, entonces

$h'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3}$

$\vdots$

Detengámonos a analizar las funciones anteriores:

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots \implies f(0) = a_0$

$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots \implies f'(0) = a_1$

$f''(0) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + 4 \cdot 3a_4 z^2 + \cdots \implies f''(0) = 2a_2$

$f'''(z) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 z + \cdots \implies f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = n! a_n$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Corolario 36 *Si $f^{(n)}(z)$ es analítica para todo n, entonces f es de clase C^{∞}.*

3.2. Representaciones por series de Taylor

1. Función exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. Función seno:

$$\sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right] = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n - (-i)^n}{n!}$$

Analicemos la expresión $(i)^n - (-i)^n$:

Si n es par: $(i)^{2k} - (-1)^{2k}(i)^{2k} = (i)^{2k}[1 - (-1)^{2k}] = 0$

Si n es impar: $(i)^{2k+1} - (-1)^{2k+1}(i)^{2k+1}$
$= (i)^{2k}i[1 - (-1)^{2k}(-1)] = 2(i)^{2k}i = (i^2)^k 2i = (-1)^k 2i$

Entonces

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Función coseno:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

4. Función seno hiperbólico:

Sabemos que

$\sinh iz = i \sin z$, para todo z, en particular para $w = iz$, entonces $\sinh w = i \sin -iw$

Por lo tanto

$$\sinh z = i \sin -iz = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Analicemos

$$(-iz)^{2n+1} = (-i)^{2n+1} z^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1)[i^2]^n i z^{2n+1}$$
$$= (-1)(-1)^n i z^{2n+1} = (-i)(-1)^n z^{2n+1}$$

Entonces

$$\sinh z = -i^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5. Función coseno hiperbólico:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

3.3. Serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{(1-z)^4}$$

Por lo tanto tenemos que $f^n(0) = n!$

luego $a_n = \dfrac{f^n(0)}{n!} = 1$
así tendremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty} z^n, |z| < R = 1$$

donde el radio de convergencia está dado por

$$R = \frac{1}{\overline{\text{lím}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Otros ejemplos de series geométricas son
i)

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$$

ii)

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$$

iii)

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Sabemos que $(\ln(1+z))' = \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$
luego integrando tenemos

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}, |z|<1$$

Lo mismo ocurre con $(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ luego integrando tenemos

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$$

3.4. Extensión analítica

Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0^n)$, para $|z - z_0| < R$, tenemos

$$f^k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)......(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

Para todo $k = 0, 1, 2...$ Para cada k las series tienen el mismo radio de convergencia. En particular tenemos

$$f^k(z_0) = n! a_k$$

o

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}$$

La serie de potencias entonces puede escribirse como

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

y se llama serie de Taylor en torno al punto $z = z_0$. Consideremos $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función posible de ser expresada en terminos de serie de Taylor, digamos

$$\Phi(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

para $|x - x_0| < R$ $(x \in \mathbb{R})$, existe entonces una función analítica (única) definida por

$$f(z) = \sum_{n} \geq 0 \frac{(f^n(x_0))}{n!}(z-x_0)^n$$

para $|z - x_0| < R$ $(z \in \mathbb{C})$ tal que $f(x) = \Phi(x)$ para $|x - x_0| < R$, $(x \in \mathbb{R})$. La función f se denomina extensión analítica de Φ.

Ejemplo 37 *Conocemos la serie de Taylor* $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. *Se define la extensión analítica* $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. *Observemos que esta serie converge para todo* $z \in \mathbb{C}$. *Notemos que*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = f(z)$$

y $f(0) = 1$, *luego* $f(z) = e^z$

3.5. Prolongación analítica

Sea R el radio de convergencia de la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_0. Si $|z - z_0| < R$, la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_1 converge ciertamente para $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$. Sin embargo, puede haber un radio de convergencia mayor R_1. Entonces tenemos definida la función analitica $f(z)$ como función analítica en un dominio mayor. Este proceso se conoce como prolongación analítica.

Ejemplo 38 *Consideremos la función*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \tag{3.1}$$

Se ve fácilmente que su radio de convergencia es 1. De este modo $f(z)$ *esta definida para* $|z| < 1$. *Sumando las series corespondientes a* $f(\frac{1}{2}), f'(\frac{1}{2})$... *encontramos la serie de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \{\frac{-2}{3}(z - \frac{1}{2})\}^n$$

Su radio de convergencia es $\frac{3}{2}$, *de este modo hemos prolongado* $f(z)$ *al círculo* $|z - \frac{1}{2}| < |\frac{3}{2}|$ *que es exterior al círculo original* $|z| < 1$. *Mediante una sucesión de círculos podemos cubrir cualquier punto del plano* z *distinto del* $z = -1$. *Queda asi definida* $f(z)$ *como una funcion analítica para* $z \neq 1$. *De hecho* $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)}$

Observación 39 *El radio de convergencia* R *de la serie de Taylor de* $f(z)$ *en torno a* z_0 *es igual a la distancia de* z_0 *a la singularidad de* $f(z)$

Ejemplo 40 *La serie de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

de la función real $\dfrac{1}{(1+x^2)}$ *converge para* $|x| < 1$, *pero diverge para* $x = 1$, *aun cuando* $\dfrac{1}{(1+x^2)}$ *es indefinidamente derivable para todo valor de* x. *La explicación radica en la extensión de la función* $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)}$. *Esta función es singular en* $z = \pm i$. *Luego su serie de Taylor* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *en torno a* $z = 0$ *tiene radio de convergencia* $|i - 0| = 1$. *Si* $R = \infty$, *la función* $f(z)$ *es analítica para todo* z. *Una tal función se llama entera.*

3.6. Transformaciones conformes

Proposición 41 *Una Transformación conforme es una función* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *analítica tal que* $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$

Observación 42 *Si* f *es conforme, entonces* f *preserva los ángulos*

Consideremos $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $f(z) = u + iv$, luego vemos que

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Teorema 43 *Si* Ω *es una región simplemente conexa (sin hoyos), entonces siempre existe* $f : \Omega \to D$ *biyectiva y analítica, o bien analítica y conforme*

Capítulo 4

Integración

4.1. Definición y propiedades

Definición 44 *Un camino o curva regular es una función*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

con derivada continua y no nula.

Definición 45 *Un cambio de parámetro es una función*

$$g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

que es biyectiva y con derivada continua tal que $g(\alpha) = a$ *y* $g(\beta) = b$

Ejemplo 46 *1)* $\gamma(t) = (1 - t)p + tq$, $0 \leq t \leq 1$

$\gamma'(t) = q - p$ *describe una recta desde el punto* p *al punto* q

2) $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *describe una circunferencia de centro* z_0 *y radio* R

3) $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ *describe una elipse*

4) $\gamma(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$ *describe una hipérbola*

5) $\gamma(t) = a + b\cos(t)$, $t \in [a, b]$ *describe una cardioide*

Definición 47 *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *se define*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

donde $\gamma : [a, b] \to \Omega$ *es un camino regular*

Proposición 48 *Si existe* F *tal que* $F' = f$, *entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

Corolario 49 *Si existe* F *tal que* $F' = f$ *y* γ *es una curva cerrada, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

4.2. Formula de Cauchy

Teorema 50 *(De Green) Sea Ω un dominio abierto y conexo, cuya frontera es regular, entonces*

$$\int_{\gamma=\partial\Omega} (Pdx + Qdy) = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

En notación compleja el Teorema de Green puede ser expresado como

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i \int\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy$$

Proposición 51 *(Fórmula de Cauchy) Sea f analítica en Ω con frontera regular, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0); z_0 \in \Omega$$

Ejemplo 52 *1)* $\int_\gamma \frac{1}{z^2-1} dw$ *donde* γ *es la región de la figura*
Podemos escribir la integral como

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+1}$$

con $f(z) = \frac{1}{z-1}$ *analítica en* γ *y considerando* $z_0 = -1$*, la integral toma el valor*

$$2\pi f(-1) = 2\pi(\frac{-1}{2}) = -\pi i$$

2) Si consideramos la integral anterior, pero con la región β*, entonces podemos escribir*

$$\int_\beta \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}(\int_\beta \frac{1}{z-1} - \int_\beta \frac{1}{z+1})$$

con $f(z) = 1$ *analítica en* β *la integral toma el valor*

$$\frac{1}{2}((2\pi i f(1)) - (2\pi i f(-1))) = 0$$

Teorema 53 *Una función* f *es analítica en* Ω *si y sólo si para todo* z_0 *en* Ω *existe una serie de potencias tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, |z-z_0| \in \mathbb{R}$$

Demostración.

($\Leftarrow$) Queda demostrado por lo visto antes

($\Rightarrow$) Consideremos la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw, C(t) = z_0 + re^{it}$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \tfrac{1}{w-z_0}\tfrac{1}{[1-\frac{z-z_0}{w-w_0}]} \\
&= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}, |z-z_0| < |w-z_0|
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw]}(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

■

Corolario 54

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

4.3. Teoría de indice y homotopía

Definición 55 *Sea γ una curva cerrada, de clase C^1, y $z \in \mathbb{C}$. Se llama Indice de z con respecto a γ al número*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(w-z)}$$

La expresión anterior es la fórmula de Cauchy con $f(w) = 1$. Reescribiendo tenemos que

$$Ind_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

Observación 56 *1) El índice indica .^{el} número de vueltas"que da la curva γ en torno a z, si $z \in Int(\gamma)$*
2) Si $z \in Ext(\gamma)$, entonces $Ind_\gamma(z) = 0$ (por teorema de Cauchy)
3) Si $Ind_\gamma(z) \neq 0$, entonces $z \in Int(\gamma)$
4) $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}\{0\}$ si $z \in Int(\gamma)$

Definición 57 *Dos curvas cerradas cuyas trayectorias estan en un conjunto Ω se dice que son homótopas en Ω si pueden deformarse continuamente entre sí, sin que las deformaciones se salgan de Ω.*

Esta ltima imgen muestra el caso en que no se cumple la homotopía, pues Φ impide la deformación continua.

Mas precisamente, sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y γ_0 y γ_1 curvas cerradas en Ω. γ_0 es homótopa a γ_1 si existe una función continua $H : [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ tal que $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(a,s) = H(b,s)$ y $H(t,1) = \gamma_1(t), t \in [a,b]$, en tal caso se dice que t es una homotopía en Ω entre γ_0 y γ_1 y se denota $\gamma_0 \sim \gamma_1$

Teorema 58 *(Invarianza del Indice por homotopía) Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto , γ_0 y γ_1 curvas cerradas en Ω tal que $\gamma_0 \sim \gamma_1$, entonces $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$*

Teorema 59 *Si γ_0 y γ_1 son dos curvas cerradas en Ω y $\gamma_0 \sim \gamma_1$, entonces:*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

para cada función analítica f en Ω.

Demostración. Por demostrar $\int_{\gamma_0 \setminus \gamma_1} = 0$, eso sigue del teorema de Cauchy. ■

4.4. Teoremas fundamentales

Definición 60 *Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice simplemente conexo si es conexo y cualquier camino cerrado en Ω es homotópico a un punto en Ω*

Teorema 61 *Sea Ω un conjunto simplemente conexo y sea f analítica (u holomorfa) en Ω entonces existe F tal que $F' = f$*

Demostración. Sea z_0 cualquier punto en Ω. Sea $z \in \Omega$. Sea β un camino en Ω desde z_0 hasta z. Definimos $F(z) = \int_\beta f(s)ds$.

F está bien definida, pues si α es otro camino desde z_0 hasta z, entonces

$$\int_{\beta(\alpha)^{-1}} f(s)ds = 0$$

Entonces

$$\int_\alpha f(s)ds - \int_\beta f(s)ds = 0$$

y calculamos

$$(\frac{F(z+h)-F(z)}{h}) - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(s)ds - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} |f(s)-f(z)|ds$$

Sea $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z+h)| < \varepsilon$ entonces

$$|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(s)-f(z))ds| \leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(s)-f(z)||ds| \leq \frac{\varepsilon}{|h|}\int_z^{z+h} |ds|$$

Afirmacion

$$\frac{1}{|h|}\int_z z+h|ds| = 1$$

En efecto, sea $\gamma(t) = z + th, t \in [0,1]$, un camino de z a $z+h$ entonces

$$\frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |ds| = \frac{1}{|h|}\int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \frac{1}{|h|}\int_0^1 |h|dt = 1$$

Esto prueba la afirmación y el teorema. ∎

Corolario 62 *Sea f una función holomorfa sin cero, definida en un abierto simplemente conexo, entonces existe una función $g(z)$ tal que*

$$e^{g(z)} = f(z)$$

o bien

$$g(z) = \ln f(z)$$

Demostración. Consideremos la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, holomorfa por hipotesis. Definimos

$$g_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(s)}{f(s)} ds$$

es claro que g_1 no depende del camino, pues Ω es simplemente conexo. Además

$$g_1'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

por teorema anterior. Sea $h(z) := e^{g_1(z)}$. Entonces

$$h' = e^{g_1} g_1' = e^{g_1} \frac{f'}{f}$$

así

$$h'f - hf' = 0$$

luego

$$(\frac{h}{f})' = 0$$

y

$$\frac{h}{f} = c$$

con $c = cte$

Por lo tanto $h(z) = cf(z)$, $c \neq 0$ pues $h \neq 0$

Asi tendremos

$$f(z) = \frac{1}{c} e^{g_1} = e^{g_1(z) + c_1}$$

Por lo tanto

$$g(z) = g_1(z) + c_1$$

entonces

$$e^{g(z)} = f(z)$$

■

Ejemplo 63 1) Sea Ω:=$\mathbb{C}\setminus\{$semieje real negativo$\}$. Sea $f(z) = z^2$. Entonces $f(z)$ es holomorfa y sin ceros en Ω simplemente conexo. Entonces existe $\log(z^2)$. Note que no se puede definir $\log(z^2)$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues no es simplemente conexo.
2) $\sqrt{f(z)}$existe. En efecto:
Definimos:

$$\sqrt{f(z)} = e^{\frac{1}{2}gz}$$

Recordemos el teorema de Cauchy:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

si f es analitica y γ el borde del camino donde f está definida.
Nos preguntamos si existen otras funciones (que no sean analíticas) con la propiedad anterior. La respuesta es no.

Teorema 64 *(reciproco del teorema de Cauchy) Si f es una función continua definida en Ω y tal que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

sobre toda la curva en Ω tal que γ sea homotópica a un punto. Entonces f es holomorfa.

Demostración. Por hipotesis,

$$F(z) = \int_{z_0} zf(w)dw$$

está bien definida en $|z - z_0| < r \subseteq \Omega$. Además $F(z) = f(z)$ (existe la derivada).

Luego $F(z)$ es holomorfa y por lo tanto:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n\geq 01} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

entonces f es holomorfa. ∎

Teorema 65 *(Principio del Máximo) Sea f análitica en Ω, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo en Ω, a menos que $f(z)$ sea constante.*

Demostración. Observemos primero que $|f(z)|$ constante implica $f(z)$ constante. En efecto. Escribamos:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y), z = x + iy$$

entonces

$$|f(z)|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2$$

Por hipotesis tenemos

$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial x} = 2u(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2v(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial y} = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}$$

Así tendremos que

$$0 = u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}$$

Por las ecuaciones de Cauchy Riemman tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

luego

$$0 = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$0 = -u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Caso 1: $u^2 + v^2 = 0$ (determinante de la matriz).

Entonces $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = 0$, luego $f(z) = 0$

Caso 2: $u^2 + v^2 \neq 0$

Entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

Además por las ecuaciones de Cauchy Riemman $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Luego $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$

Por lo tanto $f(z) = cte$

Supongamos ahora que $|f(z)|$ alcanza su máximo en Ω y no es idénticamente constante. Entonces existe $z_0 \in \Omega$ donde $|f(z)|$ es máximo. Sea γ la frontera de un círculo de centro z_0 y radio r contenido en Ω (abierto). Entonces $|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)|$ para cada $\theta \in (0, 2\pi)$. Luego

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{s - z_0} ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta < |f(z_0)|$$

lo cual es una contradicción ■

Corolario 66 *Si $f(z)$ es analítica en Ω y continua en $\partial\Omega$ y si $|f(z)| \leq M$ sobre $\partial\Omega$ entonces $|f(z)| < M$ en Ω, a menos que $f(z)$ sea constante.*

Teorema 67 *(principio de reflexión de Schwartz) Sea $f(z)$ holomorfa en un abierto Ω con $[a,b] \subseteq \partial\Omega$, f es además continua en $\Omega \bigcup [a,b]$. Suponemos que $f(x)$ es real si $a \leq x \leq b$. Entonces f se extiende al dominio $\Omega^* = \Omega \bigcup \overline{\Omega} \bigcup [a,b]$ donde $\overline{\Omega} := \{z / \overline{z} \in \Omega\}$. Además, en $\overline{\Omega}$ se tiene que $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$*

Demostración. Claramente la fórmula $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para $z \in \overline{\Omega}$, extiende $f(z)$ al dominio $\overline{\Omega}$

Para demostrar que f es holomorfa en Ω^* calculamos $\int_\gamma f(z)dz$ donde γ es una curva en Ω^* homotópica a un punto. Si γ esta en Ω ó $\overline{\Omega}$ no hay problema. Luego hay que analizar el caso en que γ se encuentre en ambas.

Separamos γ en dos caminos. Puesto que la integral sobre cada uno se anula, se obtiene: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

En efecto

$$\int_\gamma f = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_{1\epsilon}} + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_{2\epsilon}}$$

Luego por el teorema de Morera, f es holomorfa. ■

Observación 68 *Da lo mismo hacer una reflexión sobre el eje real o bien en una recta cualquiera. Por lo tanto, si f está definida por ejemplo en un rectángulo, por el principio de reflexión de Schwartz,* *es posible extenderla a todo el plano. Análogamente se podría hacer con un triángulo.*

Proposición 69 *(Desigualdad de Cauchy) Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathbb{C}$ (entera). Entonces*

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r)$$

donde $M(r) = max_{|z|=r}|f(z)|$

Demostración. Tenemos por la fórmula de Cauchy con $z_0 = 0$

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

donde C es el círculo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta \geq 2\pi$. Se obtiene:

$$|f^n(0)| = |\frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} rie^{i\theta} d\theta| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n} d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n} M(r) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{n! M(r)}{r^n}$$

■

Teorema 70 *(de Liouville) Sea $f(z)$ una función analítica, entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Como f es acotada

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M$$

donde $M = sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.

Luego haciendo $r \to \infty$ se obtiene $f^n(0) = 0$ para $n \geq 1$.

Como f es analítica, $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \ldots.$
Luego $f(z) = f(0)$, por lo tanto f es constante. ∎

Teorema 71 *(Fundamental del Algebra) Todo polinomio no constante* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ *con* $a_n \neq 0$ *tiene* n *raíces en* $\mathbb{C}$.

Demostración. Basta demostrar que tiene una raíz (luego se divide por ella y se obtiene un polinomio de grado menor donde se aplica denuevo el resultado).
Supongamos, por absurdo, que $p(z)$ no tiene ninguna raíz.Entonces $h(z) = \frac{1}{p(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ (entera). Vamos a demostrar que $h(z)$ (y luego $p(z)$) es constante, por lo cual probamos que $h(z)$ es acotada en $\mathbb{C}$ y usaremos el teorema de Liuville.
En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} &= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{a_n z^n + \ldots + a_0} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{a_n + a_{n-1} t + \ldots a_0 t^n} = 0 \end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|z| \geq R$ luego $|h(z) = \frac{1}{p(z)}| \leq \epsilon$.
Por otra parte, si $|z| \leq R$ entonces $|h(z)| \leq M$, pues h es continua y $\{z : |z| \leq R\}$ es compacto . Por lo tanto $|h(z)| \leq \epsilon + M$. Luego h es acotada, entonces $h(z)$ es constante y así $p(z)$ es constante. Contradicción. ∎

Teorema 72 *(Del Valor Medio) Si f es Analítica en un abierto Ω y $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$ entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Demostración. Usamos la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}$$

donde C es el círculo $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Entonces

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Polos y residuos

5.1. Desarrollo en serie de Laurent

Teorema 73 *Sea $f(z)$ una función analítica en un anillo (o corona) $r < |z - z_0| < R$.Entonces $f(z)$ se puede representar por una serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

que converge uniformemente en compactos de ese anillo. Además:
1) La primera serie converge en $|z - z_0| < R$
2) La segunda serie converge en $|z - z_0| > r$

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 circulos de radios r' y R' respectivamente, con $r < r' < R' < R$.

Por la fórmula de Cauchy en el anillo $r' \leq |z - z_0| \leq R'$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(s)}{(s-z)} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(s)}{(s-z)} ds \end{aligned}$$

con $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$

Procedemos ahora como sigue:

En γ_2:

$$\frac{1}{(s-z)} = \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(s-z_0)^{n+1}} (z - z_0^n)$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(s)}{(s-z)} ds = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

En γ_1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \frac{1}{(1 + \frac{s-z_0}{z_0-z})} \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \frac{1}{(1 - \frac{s-z_0}{z-z_0})} \\ &= \frac{-1}{z-z_0} \sum_{n\geq 0} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z-0^n)} \\ &= \sum_{n\geq 0} (s-z_0)^n \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

para $|s - z_0| < |z - z_0|$.

Integrando término a término, lo cual es justificado por la convergencia uniforme sobre compactos de la serie, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(s)}{(s-z)}ds &= \sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^n ds)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\\ &= \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^{n-1})\frac{1}{(z-z_0)^n}\end{aligned}$$

Esto prueba el teorema.

Observación 74 *De la demostración del teorema anterior se nota que:*

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^{k-1}ds$$

con $k = 1, 2...$

Hay tres posibilidades :

1)$b_k = 0$ *para todo* $k = 1, 2....$ *En este caso, la función es analítica en* $|z - z_0| < R$

2)b_k *para todo* $k > m$. *En este caso*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0^m)} + ...\frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...$$

y se dice que $f(z)$ *tiene un polo de orden* m *en* z_0.

Además :

$$\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)}$$

se llama parte principal de f *y*

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|} f(s)ds = Res(f, z_0)$$

se llama residuo.

3) Hay infinitos $b_k \neq 0$. *En este caso se dice que* f *tiene una singularidad esencial.*

Ejemplo 75 *1) Desarrollo de* $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ *en torno a* $z_0 = 0$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^3} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + ...$$

Luego $f(z)$ *tiene un polo de orden 3 en* $z - 0 = 0$

2) Desarrollo de $f(z) = e^{1/z}$ *en torno a* $z_0 = 0$.

$$e^u = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...$$

Entonces

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + ...$$

Luego $e^{1/z}$ *tiene una singularidad esencial en* $z_0 = 0$

Teorema 76 *(Casorati-Weierstrass) Sea* z_0 *una singularidad esencial de* $f(z)$*. Entonces la imagen de cualquier vecindad de* z_0 *es densa en el plano complejo* $\mathbb{C}$*. Es decir,* $\overline{f(D(z_0, r))} = \mathbb{C}$

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe un $\delta > 0$ $\epsilon > 0$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$.

Consideremos

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Claramente h es analítica en $D(z_0, \epsilon)$. Pero como h es acotada $|h(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$; se tiene que $h(z)$ es también analítica en z_0 (Tiene un desarrrollo en serie de Laurent y si tuviera un número infinito de potencias negativas, entonces no podria ser caotada

$$h(z)=\frac{b_{-2}}{(z-z-0)^2}+\frac{b_{-1}}{(z-z_0)}+b_0+b_1(z-z-0)+b_2(z-z_0)^2+...$$

y $|h(z)|<\frac{1}{\epsilon}$ para todo $z\in D(z_0,\delta)$, luego $b_{-1}=b_{-2}=...=0$. Entonces

$$h(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+...$$

luego h es analítica en z_0

$$\begin{aligned} f(z)-w_0 &= \frac{1}{b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0^2+...)} \\ &= c_0+c_1(z-z-0)+... \end{aligned}$$

Entonces $f(z)=w_0+c_0+c-1(z-z_0)+...$ .Asi f es analítica en z_0. Contradicción.

Otro caso es que

$$\begin{aligned} f(z)-w_0 &= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+...} \\ &= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n}\frac{1}{(1+\frac{b_{n+1}}{b_n}(z-z_0)+...)} \\ &= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n}(c_0+c_1(z-z_0)+...) \end{aligned}$$

Luego $f(z)=w_0+\dfrac{c_0}{b-n(z-z_0)^n}+\dfrac{c_1}{b_n(z-z_0)^{n-1}}+...$

Asi f tiene un polo de orden n en z_0. Contradicción ∎

Definición 77 *Una función f se dice meromorfa en Ω si es el cuociente de dos funciones analíticas, esto es: $f = \frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$*

Observación 78 *Las singularidades de una función meromorfa, corresponden a los ceros de q (pueden ser polos o singularidades esenciales).*
Note además, que los ceros de una función analítica son discretos.
En efecto: Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$, entonces existe una vecindad de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Sea n_0 el primer entero tal que $a_{n_0} \neq 0$ entonces

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \underbrace{(a_{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0) + ...)}_{g(z)}$$

Por lo tanto hay una vecindad de z_0 donde $f(z) \neq 0$ excepto por z_0.
En efecto : Sea $z_n \to Z_0$ tal que $f(z_n) = 0$. Entonces

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^{n_0} g(z_n)$$

Asi $g(z_n) = 0$ para todo n . Luego $g(z_n) = 0$. Contradicción.

5.2. Residuos

Teorema 79 *(De residuos) Sea f meromorfa en Ω. Sea K compacto en Ω con borde γ. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

Observación 80 *Hay solo un numero finito de singularidades en K.*
En efecto, si hubiese una suceción de singularidades, esta tendria un punto de acumulación en K y luego en Ω, digamos z^*. Pero z^* tiene una vecindad $D(z^*, R) \setminus \{z^*\}$, en la cual f es holomorfa, lo cual es una contradiccion pues en esta vecindad siempre habran puntos de la sucesión de polos y por lo tanto f no puede ser holomorfa.

Demostración. Sean C_i pequeos círculos en torno a z_i. La función $f(z)$ es holomorfa fuera de la union de sus discos.

Por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{|z-z_i|} f(z)dz \\
&= \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)
\end{aligned}$$

■

Proposición 81 *Si* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *meromorfa, es tal que* $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ *y* $q'(z_0) \neq 0$. *Entonces*

$$Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q(z_0)}$$

Demostración.

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + ... = q'(z_0)(z - z - 0) + ...$$

Entonces

$$\begin{aligned} (z - z_0)f(z) &= \frac{(z - z_0)p(z)}{q'(z_0)(z - z_0) + \dfrac{q''(z_0)(z - z - 0)^2}{2!} + ...} \\ &= \frac{p(z)}{q'(z_0) + \dfrac{q''(z_0)(z - z_0)}{2!} + ...} \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{z \to z_0}(z - z - 0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z - 0)}$$

Por otra parte

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a - 1(z - z_0) + ...$$

Así

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + ...$$

Luego

$$\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = a - 1 = Res(f, z - 0)$$

Por lo tanto

$$Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

■

Ejemplo 82 *Calcular el residuo de* $\tan z$ *en* $z_0 = \pi/2$

Tenemos que $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, *donde*

$$\sin(\pi/2) = 1 \neq 0$$

$$\cos(\pi/2) = 0$$

y

$$-\sin(\pi/2) = -1$$

Así tendremos que

$$Res(\tan z, \pi/2) = \frac{1}{-1} = -1$$

Observación 83 *Si la función* f *del Teorema de Residuos es, además, analítica en todo punto del plano exterior a* C *entonces, en vez de calcular*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_i)$$

podemos calcular

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0)$$

En efecto. Primero hacemos el desarrollo de Laurent de f *en torno a* $z = \infty$. *Por definición esto significa que debemos hacer el desarrollo en serie de Laurent de* $f(\frac{1}{z})$, *en torno a* $z = 0$; *digamos*

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

si $|z| < R$, *de manera que*

$$f(w) = a_{-2}w^2 + a_{-1}w + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

si $|w| > R$, *es el desarrollo en serie de Laurent de* f *en torno a* $z = \infty$.

En particular, note que siempre el desarrollo en serie de Laurent de f *en torno a* $z = \infty$ *tiene entonces la forma:*

$$f(w) = ... + \frac{b_{-2}}{w^2} + \frac{b_{-1}}{w} + b_0 + b_1 w + b_2 w + ...$$

si $|w| > R$. *Además por definición* $Res(f, \infty) = b_{-1}$.

Construyamos ahora la expresión $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ *a partir de la expresión anterior:*

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{z}) &= ... + b_{-2}z^2 + b_{-1}z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + ..., |z| < R \\ asi & \\ \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) &= ... + b_{-2} + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + ..., |z| < R \end{aligned}$$

Luego

$$Res(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0) = b_{-1} = -Res(f(z), \infty)$$

Ahora notemos que

$$\int_C f(z)dz + \int_{-C} f(z)dz = 0$$

Luego

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz$$

Pero tenemos que

$$\int_{-C} f(z)dz = 2\pi i Res(f, \infty)$$

Por lo tanto

$$\int_{C} f(z)dz = 2\pi i Res(f, \infty) = 2\pi i Res(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z^2}), 0)$$

que era la afirmación.

Ejemplo 84 *Consideremos* $f(z) = \dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ *analítica en todo z exterior a* $|z| = 2$.
Entonces

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{z(5-2z)}{1-z}$$

luego

$$\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \frac{5-2z}{z(1-z)}$$

así

$$\int_{C} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(5) = 10\pi i$$

Teorema 85 *(Principio del Argumento) Sea* f *meromorfa en el interior de* γ. *Sea* $a_1, a_2, ...a_n$ *los ceros de* f *y* $b_1, b_2, ...b_n$ *los polos de* f.
Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{n} F(a_i) + \sum_{i=1}^{m} F(b_i)$$

Para cada función holomorfa $F(z)$.

En particular, si $F(z) = 1$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-m)$$

Demostración. Sea α uno de los puntos a_i o b_j. Tenemos

$$f(z) = a_v(z-\alpha)^v(1 + b_1(z-\alpha) + ...)$$

donde v es el orden del cero o polo en a_i o b_j con $v \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$f'(z) = va_v(z-\alpha)^{v-1} + ...$$

Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v}{(z-\alpha)} + ...$$

Como f es holomorfa

$$F(z) = F(\alpha) + F'(\alpha)(z-\alpha) + ...$$

Así

$$F(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{vF(\alpha)}{(z-\alpha)} + vF'(\alpha) + ...$$

Vemos que

$$Res(F\frac{f'(z)}{f(z)}, \alpha) = vF(\alpha)$$

Por el Teorema de Residuos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n}F(a_i) - \sum_{i=1}^{m}F(b_i)$$

∎

Observación 86 *Ya que*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw$$

Entonces

$$Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt$$

Así

$$\begin{aligned} Ind_{f\circ\gamma}(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = V_\gamma(t) \end{aligned}$$

Y se llama el número de vueltas o número de rotación de f alrededor de γ.

Por lo tanto, el Principio del Argumento dice que

$$Ind_{(f\circ\gamma)}(0) = n - m$$

En particular, si f es analítica

$$Ind_{(f\circ\gamma)}(0) = n$$

Así, el Principio del Argumento dice que cunado la componente encerrada por γ está enteramente contenida en el dominio de analiticidad de f, el número de vueltas que da f alrededor de γ coincide con el número total de ceros que pesee f en esta componente, contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden.

Teorema 87 *(de Rouché) Sea C el borde de un dominio Ω y sean f y g analíticas en Ω tales que $|f(z)| < |g(z)|$ para $z \in C$. Entonces $f(z)+g(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de ceros en Ω*

Demostración. Tenemos en C

$$|\frac{f}{g}| < 1$$

Entonces

$$\int_C \frac{(\frac{f}{g})'}{1+\frac{f}{g}} = 0$$

pues la imagen de C bajo $1+\frac{f}{g}(z)$ está en el disco $D(1,1)$ .Luego

$$\int_C \frac{f'g - fg'}{(1+\frac{f}{g})g^2} = 0$$

esto es

$$\int_C \frac{f'g - fg'}{(g+f)g} = 0 \tag{5.1}$$

Por el Teorema anterior, basta demostrar que

$$\int_C \frac{f'+g'}{f+g} = \int_C \frac{g'}{g}$$

esto es

$$\int_C fracf' + g'f + g - \frac{g'}{g} = 0$$

o bien

$$\int_C \frac{f'g + g'g - g'f - g'g}{(f+g)g} = 0$$

que es precisamente 13,2. Esto prueba el Teorema.

5.3. Cálculo de integrales

Hemos visto que si $f(z)$ es analítica y tiene un polo simple (orden 1) en z_0 entonces

$$\phi(z) = (z - z_0)f(z)$$

tiene una singularidad removible en z_0, luego tomando límite tenemos

$$\phi(z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$$

Por otro lado, como $\phi(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva cerrada en torno a z_0 se tiene por la fórmula de Cauchy

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = Res(f, z_0)$$

Así, si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z \to z_0}((z - z_0)f(z))$$

Si $f(z)$ tiene un polo de oredn k en z_0, se puede definir

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

y

$$\phi(z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)^{nk} f(z)$$

Entonces $\phi(z)$ es analítica en una región y tenemos

$$\phi^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}dz = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_C f(z)dz = (k-1)!Res(f, z_0)$$

Entonces

$$\int_C f(z)dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{\partial^{(k-1)}((z - z_0)f(z))}{\partial z^{(k-1)}}$$

de donde

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\partial^{(k-1)}((z-z_0)^k f(z))}{\partial z^{(k-1)}} \right)$$

5.4. Aplicaión del Teorema de Residuos

Sea $A_p(z)$ y $B_q(z)$ dos polinomios de grado p y q respectivamente. Sean (a_k) los ceros de $B_q(z)$ y sea: $f(z) = \dfrac{A_p(z)}{B_q(z)}$.

Sea γ_R la semicircunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it}$; $0 \leq t \leq \phi$. I) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y $q \geq p+2$. Si R es p suficientemente grande, se tiene por el teorema de residuos que:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Im(a_i)>0} Res(f, a_i)$$

Se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{Im(a_i)>0} Res(f, a_i)$$

Justifiquemos que: $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$, cuando $R \to \infty$. Ocupamos el siguiente lema.

Lema 88 *Sea $g(z)$ continua en $\{z = \rho e^{i\theta}; \rho \geq R_0; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Si ocurre que $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$, entonces:*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$$

.

Veamos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} zf(z) &= z\frac{A_p(z)}{B_q z} \\ &= \frac{\text{polinomio de grado } p+1}{\text{polinomio de grado } q} \\ &= \text{polinomio de grado } p+1-q \\ &\sim \frac{1}{z} \to 0 \text{ cuando } z \to \infty \end{aligned}$$

Demostración. Sea el camino $\gamma_R(t) = \rho e^{it}$ con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mid \int_{\gamma_R} g(z)dz \mid &= \mid \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\rho e^{it})\rho i e^{it} dt \mid \\ &\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(\rho e^{it}) \mid dt \\ &\to 0 \qquad \text{Cuando } \rho \text{ tiende a } \infty \end{aligned}$$

■

Ejemplo 89 *Demostrar que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. *Solución: Sea* $z^2 = A_2(z)$ *y* $1 + z^4 = B_4(z)$. *Entonces:*

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{A_2(z)}{B_4(z)}.$$

Las races de $B_4(z) = 1 + z^4$ *tal que,* $z^4 = -1$, *son:*
$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}; z_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$. *Además,* $f(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$.
Luego, los residuos de cada singularidad que está dentro de la semicircunferencia son:

$$\begin{aligned} Res(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \tfrac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \tfrac{z_1^2}{4z_1^3} = \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{z_1} \\ &= \tfrac{1}{4} e^{\frac{-\pi i}{4}} \end{aligned}$$

Por otro lado, el residuo de f respecto a la segunda singularidad es:

$$Res(f, z_2) = \frac{1}{4} e^{\frac{-3i\pi}{4}}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{2\pi i}{4} [e^{\frac{-\pi i}{4}} + e^{\frac{-3\pi i}{4}}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

II) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y que $q \geq p+1$ y $\lambda > 0$. Entonces por el Teorema de Residuos, para R grande, se tiene:

$$\int_{-R}^{R} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{Im(a_k) > 0} Res(f(z) e^{i\lambda z}, a_k)$$

Se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} = 2\pi i \sum_{Im(a_k) > 0} Res(f(z) e^{i\lambda z}, a_k).$$

Lema 90 *Sea g una función continua en un sector del semi-plano supeerior $\{z = \rho e^{i\theta} / \rho \geq R_0; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, donde $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$. Si $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$ y $\lambda > 0$, entonces:*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

Demostración. Sea $\gamma_R(t) = \rho e^{it}$, con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mid \int_{\gamma_R} g(z)e^{i\lambda z}dz \mid &= \mid \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\rho e^{it})e^{i\lambda\rho e^{it}}\rho i e^{it}dt \mid \\
&\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(\rho e^{it}) \mid\mid e^{i\lambda\rho(cost+sint)}\rho i e^{it} \mid dt \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(^{\rho}e^{it}) \mid\mid e^{i\lambda\rho cost} \mid\mid e^{-\lambda\rho sint} \mid \rho \mid ie^{i} \mid dt \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(\rho e^{it}) \mid \rho e^{-\lambda\rho sint}dt
\end{aligned}$$

y $\rho e^{-\lambda\rho sint} \to 0$, cuando $\rho \to \infty$, siempre que $\lambda\rho sint > 0$, pues $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, \pi]$. Luego:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(\rho e^{it}) \mid \rho e^{-\lambda\rho sint}dt \to 0,$$

cuando $\rho \to \infty$. ∎

Ejercicio 91 *Calcular* $\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2}dx$. *Usar* $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$

III) $\int_0^{2\pi} R(senx, cosx)dx$, donde $R(x,y)$ es una función racional de dos variables reales, se puede escribir como:

$$\int_{|z|=1} R(\frac{z-\overline{z}}{2i}, \frac{z+\overline{z}}{2})\frac{1}{iz}dz$$

y esta última se resuelve con ayuda del Teorema de Residuos.

Ejemplo 92 *Calcular* $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+cosx}$, *con* $a > 1$.

Solución: Ocupando que $cosx = \frac{z+\overline{z}}{2}$, *entonces:*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+cosx}dx &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{z+\overline{z}}{2}} \frac{1}{iz}dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{(a+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z})} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2az+z^2+1}dz\end{aligned}$$

Notar que: $z^2+2az+1=0 \Leftrightarrow z = \frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$.

Luego:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

IV) Supongamos que $f(z) = \frac{A_p(a)}{B_q(z)}$ tiene un polo simple a_0 sobre el eje real. Sean $q \geq p+1$ y $\lambda > 0$. Dados, $R > 0$ y $0 < \varepsilon < R$, denotamos por $\gamma_{R,\varepsilon}$ la frontera de la región limitada por el eje real y las semicircunferencias γ_R y $a_0 + \gamma_\varepsilon$ orientadads positivamente. Para R suficientemente grande y ε suficientemente pequeo, le Teorema de Residuos proporciona:

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k)$$

Se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) + i\pi Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_0)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\lambda z}dz = & \int_{-R}^{a_0-\varepsilon} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} f(z)e^{i\lambda z}dz \\ & + \int_{a_0+\varepsilon}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz\end{aligned}$$

Por el lema visto anteriormente, la ltima integral es 0.
Probaremos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz = -i\pi Res(g(z), a_0)$.
En efecto, como $z = a_0$ es polo real simplre de $g(z)$:

$$g(z) = \frac{b_1}{(z-a_0)} + b_0 + b_1(z-a_0) + b_2(z-a_0)^2 + ...$$

Y consideramos:

$$h(z) \equiv g(z) - \frac{b_1}{(z-a_0)} = b_0 + b_1(z-a_0) + b_2(z-a_0)^2 + ...$$

Luego, $h(z)$ es analítica en $z = a_0$, o sea, $z = a_0$ es singularidad reparable de $h(z)$. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que:

$$\mid h(z) \mid < M \qquad , \mid z - a_0 \mid \leq 1$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\mid \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \mid &\leq \int_{|\gamma_{\varepsilon,0}|} \mid h(z) \mid\mid dz \mid \\
&\leq M \int_{|\gamma_{\varepsilon,0}|} \mid \gamma_{\varepsilon,0}(t) \mid dt \\
&= M \int_{|\gamma_{\varepsilon,0}|} \mid \varepsilon i e^{it} \mid dt \\
&= M\varepsilon \int_{|\gamma_{\varepsilon,0}|} = M\varepsilon\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z)dz = 0$ Entonces, volviendo a nuestro problema incial, de probar que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz = -i\pi Res(g(z), a_0)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz &= b_1 \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z-a_0}dz \\
&= Res(g(z), a_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z-a_0}dz
\end{aligned}$$

Donde:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}}\frac{1}{z-a_0}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt=-i\pi.$$

Luego, la igualdad queda demostrada. ■

Ejercicio 93 *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

V)Consideremos $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{a-1}f(x)dx \qquad ;0<a<1$. Suponemos que $f(z)$ no tiene polos en $(0,\infty)$ y que se cumple: a) $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\mid z^a f(z)\mid=0$ b) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\mid z^a f(z)\mid=0$.

Entonces:

$$\int_0^{\infty}x^{a-1}f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\sum_{a_k\neq 0}Res(z^{a-1}f(z),a_k).$$

Siendo $z^{a-1}=e^{(a-1)\log_\pi(z)}$, donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definada en $\mathbb{C}-[0,\infty]$ con $0<\theta<2\pi$.

Demostración. Consideremos la siguiente figura, más conocida como la cerradura:

Por el Teorema de Residuos, tenemos que :

$$\int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}}f(z)z^{a-1}dz=2\pi i\sum_{a_k\neq 0}Res(f(z)z^{a-1},a_k).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}} f(z)z^{a-1}dz &= \int_r^R f(x)x^{a-1}dx + \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz \\
&+ \int_R^r f(x)(xe^{2\pi i})^{a-1}dx + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}dz \\
&= \int_r^R f(x)x^{a-1}dx - \int_r^R f(x)x^{a-1}e^{2\pi i^{a-1}}dx \\
&+ \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}dz \\
&= (1-e^{2\pi ia})\int_r^R f(x)x^{a-1}dx + \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}d
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mid \int_{\gamma_R} z^{a-1}f(z)dz \mid &= \mid \textstyle\int_0^{2\pi} R^{a-1}e^{i(a-1)t}f(Re^{it})Rie^{it}dt \mid \\
&= \mid \int_0^{2\pi} R^a f(Re^{it})e^{i\alpha t}idt \mid \\
&\leq \int_0^{2\pi} \mid R^a f(Re^{it}) \mid dt \to 0 \qquad \text{cuando} R \to \infty
\end{aligned}$$

Esto ocurre, ocupando la primera propiedad: $\lim\limits_{z\to\infty} \mid z^a f(z) \mid = 0$

Análogamenten y ocupando ahora la segunda propiedad:

$$\int_{\gamma_r} z^{a-1}f(z)dz \to 0 \qquad \text{cuando} r \to 0$$

. Ya que el $\lim\limits_{z\to 0} \mid z^a f(z) \mid = 0$. ■

5.5. Fórmula de Poisson

Recordemos que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Sabemos que si f es analítica en $\mathbb{D}$, entonces por fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

siempre que $|z| < 1$ donde $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sea $z_1 = \frac{1}{\overline{z}}$, con $z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_1)}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\frac{1}{(w-z)} - \frac{1}{(w-\frac{1}{\overline{z}})})f(w)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(|z|^2-1)}{(w-z)(w\overline{z}-1)}f(w)dw
\end{aligned}$$

Ya que

$$\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-\frac{1}{\overline{z}}} = \frac{(w-\frac{1}{\overline{z}})-(w-z)}{(w-z)(w-\frac{1}{\overline{z}})} = \frac{z-\frac{1}{\overline{z}}}{(w-z)(w-\frac{1}{\overline{z}})} = \frac{|z|^2-1}{(w-z)(w\overline{z}-1)}$$

Luego

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{|z|^2-1}{(e^{it}-z)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})ie^{it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|z|^2-1}{(1-e^{-it}z)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{(e^{-it}z-1)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})dt
\end{aligned}$$

Si ponemos $z = re^{i\theta}$ con $r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|e^{-it}re^{i\theta}-1|^2}f(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|re^{i(\theta-t)}-1|^2}f(e^{it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})dt
\end{aligned}$$

donde $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2}$ y es llamado núcleo de Poisson.
Observemos que un cálculo da

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2} = \frac{1-r^2}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})} = \frac{1-r^2}{1-r(e^{-ix}+e^{-ix})+r^2}$$

Notemos que $P_r(x) \in \mathbb{R}$ para todo x, luego si $u = Ref$, entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi P_r(\theta - t)u(e^{it})dt$$

Ademaás, notemos que $P_r(x) = P_r(-x)$ y periódica en x de período 2π. También $P_r(x) \geq 0$ para $r < 1$.
Lo anterior podemos generalizarlo a un disco $\mathbb{D}(z_0, R)$

Teorema 94 *(Fórmula integral de Poisson) Sea f analítica en $\mathbb{D}(z_0, R)$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$. Entonces si $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq r \leq R$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f(z_0 + Re^{it})dt$$

Si $u = Ref$, entonces

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)u(z_0 + Re^{it})dt$$

La fórmula anterior expresa que el valor de una función analítica en un punto interior de un disco es igual al promedio ponderado (por un peso) de un valor en el borde. El peso en cuestion es el núcleo de Poisson.
Tomando $f(z) = 1$ para todo z obtenemos lo siguiente

Corolario 95

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)dt = 1$$

Una aplicación de la fórmula de Poisson es que podemos resolver el problema siguente

Problema de Dirichlet:

Resolver

$$\Delta u(x,y) = 0$$

en $x^2 + y^2 < 1$, con condiciones de borde dadas por

$$u(x,y) = g(x,y)$$

para $x^2 + y^2 = 1$, donde g es continua.

La respuesta a este problema es (en coordenadas polares)

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt$$

con $0 \leq r < 1$.

Demostración. Primero veremos que u es la parte real de una función analítica. Luego, $\Delta u = 0$ según sabemos.

En efecto, sea

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} g(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w+z}{w-z} g(w)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\frac{w}{w-z} - \frac{1}{w}) g(w)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2g(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w}dw
\end{aligned}$$

donde $\gamma(t) = e^{it}$.

Luego $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$, además

$$Ref(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}) g(e^{it}) dt$$

donde si $z = re^{i\theta}$, entonces tendríamos

$$Re(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}) = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2} = P_r(\theta - t)$$

Esto prueba que $Ref(z) = u(z)$ con $z = re^{i\theta}$, luego $\Delta u = 0$.

Veamos ahora que $u(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ (se satisface la condición de borde).

Sea $0 < r < 1$, entonces veremos que

$$\lim_{r \to -1} u(re^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.

En efecto

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - g(e^{i\theta})| &= |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt - g(e^{i\theta})| \\
&= |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(g(e^{it}) - g(e^{i\theta})) dt| \\
&= |\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} P_r(x)(g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})) dx| \\
&= |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)(g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})) dx| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)|g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)|g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{|x|\geq\delta} P_r(x)|g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

donde, dado $\epsilon < 0$ se elige $\delta > 0$ tal que $|g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| < \epsilon$ para cada θ. Si $|x| < \delta$ (por continuidad de la función g dada la hipótesis), luego

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)dx \leq \epsilon$$

Además notemos que

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \int_{|x|\geq\delta} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})|dx$$

En efecto, notemos que $P_r(x) \leq P_r(\delta)$ si $|x| \geq \delta$ y $pi \leq x \leq \pi$.
Así

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \int_{-pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})|dx$$

Sea $M = max_{-\pi\leq x\leq\pi}|g(e^{i(\theta+x)})|$, entonces

$$I_2 \leq 2MP_r(\delta)$$

Si hacemos $r \to 1-$

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2} = \frac{0}{2-2\cos(\delta)} = 0$$

Esto prueba la afirmación. ■

5.6. Fórmula de Jensen

Sea f analítica en Ω tal que $\overline{\mathbb{D}}(0,1) \subseteq \Omega$.
Supomga que f tiene un logaritmo en Ω, esto es $\log f(z)$ es analítica en Ω, entonces aplicando la fórmula integral de Poisson a $Re(\log f(z)) =$

$\log(|f(z)|)$, obtenemos

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|f(e^{it})|dt$$

con $z = e^{i\theta}$y $0 \leq r < 1$.
Ahora, si f tiene ceros en $\mathbb{D}$, $log f(z)$ puede no ser analítica. Sin embargo, se puede modificar la fórmula anterior para tomar en cuenta los ceros de f. Esta es la llamada fórmula de Jensen-Poisson.

Teorema 96 *(Fórmula de Jensen-Poisson) Sea f analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.*
Sean $a_1, a_2, ...a_n$ los ceros de f en $\mathbb{D}$.
Entonces

$$\log|f(z)| = \sum_{j=1}^{n}\log|\frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)log|f(e^{it})|dt$$

Demostración. Sea $g(z) = f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{1 - \overline{a_j}z}{z - a_j}$ para $|z| < R$ y $R < 1$
Recordemos que para cada a_i con $|a_i| < 1$

$$\phi_{a_i}(z) = \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z}$$

es una Transformación de Mobius que lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ Y $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$. Entonces

$$\phi_{a_i}(\frac{1}{\overline{z}}) = \frac{1 - a_i\overline{z}}{\overline{z} - \overline{a_i}}$$

y

$$\overline{\phi_{a_i}(\frac{1}{\overline{z}})} = 1$$

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = a_k(z - a_i)^k + ...$$

con $c_k \neq 0$.

Entonces

$$\frac{f(z)}{(z-a_i)^k} = c_k + c_{k+1}(z - a_i) + ...$$

es analítica en $z = a_i$.

Por lo tanto $g(z)$ es analítica en $\mathbb{D}(0, R)$ y no tiene ceros allí.

Admás $|g(e^{it})| = |f(e^{it})|$, y

$$\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt$$

Luego de lo anterior tenemos que

$$\ln|f(z)| + \ln(|\prod_{j=1}^{n}(\frac{1-\overline{a_j}z}{z-a_j})|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}\ln|f(z)| &= \sum_{j=1}^{n}|\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{|z-a_j|}{|1-\overline{a_j}z|} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|f(e^{it})|dt\end{aligned}$$

El caso particular en que $z = 0$, se conoce como fórmula de Jensen. ∎

Teorema 97 *(Fórmula de Jensen) Sea f analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(0) \neq 0$ y $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.*

Sean $a_1, a_2, ...a_n$ los ceros de f en $\mathbb{D}$, repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces

$$\ln|f(0)| = \sum_{j=1}^{n} \ln|a_j| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{it})|dt$$

En efecto, en este caso, $r = 0$, luego

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2}$$

entonces $P_0(x) = 1$, de donde sale el resultado usando el teorema anterior.

Observación 98 *Las fórmulas anteriores son importantes en la teoría de funciones enteras (f analítica en $\mathbb{C}$)*

5.7. Automorfismos del disco unitario

Denotemos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Lema 99 *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica tal que $f(0) = 0$.*
Entonces
i) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$
ii)$|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = az$, donde $|a| = 1$

Demostración.

i) Por la hipótesis

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z + f''(0)z^2 + ... \\ &= f'(0)z + f''(0)z^2 \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{D}$.
Entonces $g(z) = \dfrac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$ es analítica en $\mathbb{D}$.
Sea $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| = r < 1$, entonces en $\{z : |z| < r\}$ se tiene de acuerdo al principio del máximo para g

$$|\frac{f(z)}{z}| \leq Sup_{|w|=r}|\frac{f(w)}{w}| \leq Sup_{|w|=r}\frac{1}{|w|} = \frac{1}{r}$$

Haciendo ahora $r \to 1-$ se obtiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
Por otra parte, si $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$, es claro que

$$|f'(0)| = \lim_{z\to 0}|\frac{f(z)}{z}| \leq 1$$

ii) Supongamos ahora que $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \neq 0$ y $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces $|g(z_0)| = 1$ con $|z_0| < 1$.
Pero $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego el máximo se alcanza en z_0 que está en el interior de $\mathbb{D}$. Por el principio del máximo, debe ser $g(z)$ constante, digamos $g(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = az$ con $a \in \mathbb{C}$. Pero $|z_0| = |f(z_0)| = |a||z_0|$. Así $|a| = 1$.
Por otra parte, supongamos que $|f'(0)| = 1$. Entonces como $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$, tenemos que

$$|g(0)| = |f'(0)| = 1$$

Así, ya que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ concluímos otra vez que el máximo se alcanza en 0 que está en el interior de $\mathbb{D}$. Igual que antes llegamos a la conclusión. ■

El resultado anterior dice que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica tal que

$f(0) = 0$, entonces $f(z) = az$ con $|a| < 1$.
Por ejemplo $f(z) = \frac{z}{2}$.
Se puede generalizar el resultado anterior para $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$.
Um ejemplo de tal función es el siguiente $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}$ con $|a| < 1$.
En efecto, es claro que $f(a) = 0$. Veamos que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Para esto basta ver que

$$f(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Veamos, sea z tal que $|z| = 1$, entonces $z\overline{z} = 1$ o $z = \frac{1}{\overline{z}}$ de donde

$$|z - a| = |\frac{1}{\overline{z}} - a| = |\frac{1}{\overline{z}}(1 - \overline{z}a)| = |z(1 - \overline{z}a)| = |z||1 - a\overline{z}|$$

entonces

$$|f(z)| = |\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}| = \frac{|z - a|}{|1 - a\overline{z}|} = |z| = 1$$

Esto prueba la afirmación.
Note además que f es invertible (1-1) ya que, de hecho

$$f^{-1}(w) = \frac{w + a}{1 + \overline{a}w}$$

y es evidente que es prácticamente igual a f, exvcepto que a es cambiado por $-a$ de modo que $f^{-1}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Así $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}$ y luego $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, esto es f es además sobreyectiva.

Observación 100 *Si denotamos* $\phi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}$*, vemos que* $\phi_a^{-1} = \phi_{-a}$

El resultado siguente dice que toda función bianalítica de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$, tiene la forma anterior.

Teorema 101 *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica y biyectiva tal que $f(a) = 0$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y*

$$f(z) = c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Demostración.

Note que $g = f \circ \phi_{-a}$, $g(0) = 0$ y $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
Por lema de Schwarz $|g'(0)| \leq 1$.
Ahora

$$g'(z) = f'(\phi_{-a}(z))\phi'_{-a}(z)$$

entonces

$$g'(0) = f'(\phi_{-a}(0))\phi_{-a}(0) = f'(a)(1-|a|^2)$$

ya que

$$\phi'_{-a}(z) = \frac{(1+\overline{a}z) - \overline{a}(z-a)}{(1+\overline{az})^2} = \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$$

Por lo tanto

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

Análogamente, $h = \phi_a \circ f^{-1}$, con $h(0) = 0$ y $h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.
Luego $|h'(0)| \leq 1$.
Calculamos

$$h'(z) = \phi'_a(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z)$$

entonces

$$h'(0) = \phi_a'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = \phi_a'(a)(f^{-1})'(0)$$

Notemos que $\phi_a'(z) = \dfrac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$, por lo tanto $\phi_a'(a) = \dfrac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)^2} = \dfrac{1}{1-|a|^2}$, entonces $|\dfrac{1}{(1-|a|^2)}(f^{-1})'(0)| \leq 1$ y así $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 - |a|^2$.

Ahora $f^{-1}(f(z)) = z$, entonces $(f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1$ y $(f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1$, así

$$\frac{1}{1-|a|^2} \geq |f'(a)| = |\frac{1}{(f^{-1})'(0)}| \geq \frac{1}{1-|a|^2}$$

entonces

$$|f'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Con lo anterior podemos ver que

$$|g'(0)| = |f'(a)(1-|a|^2)| = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1$$

Por lema de Schwarz $g(z) = cz$ con $|c| = 1$, entonces

$$f \circ \phi_{-a}(z) = cz$$

con $|c| = 1$ y así

$$f(z) = c\phi_a(z)$$

■

Capítulo 6

Ejercicios

6.1. Ejercicios resueltos

1. Demuestre que $Arctan(z) = \frac{i}{2} ln(\frac{i+z}{i-z}) = \frac{1}{2i} ln(\frac{1+iz}{1-iz})$.

Solución:

Sea $w = \arctan(z)$ entonces

$$\tan(w) = z \Leftrightarrow \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = z.$$

Así, tenemos

$$\begin{array}{rrcl} & e^{iw} - e^{-iw} & = & i(e^{iw} + e^{-iw})z \\ \Leftrightarrow & e^{2iw} - 1 & = & ie^{2iw}z + iz \\ \Leftrightarrow & e^{2iw} & = & \frac{1+iz}{1-iz} \\ \Leftrightarrow & w & = & \frac{1}{2i} \ln(\frac{1+iz}{1-iz}) \end{array}$$

Note que:

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{i-z}{i+z}.$$

Entonces

$$0=\ln((\frac{i+z}{i-z})(\frac{1+iz}{1-iz}))=\ln(\frac{i+z}{i-z})+\ln(\frac{1+iz}{1-iz}).$$

Multiplicando por $\frac{1}{2i}$ obtenemos finalmente

$$\frac{1}{2i}\ln(\frac{1+iz}{1-iz})=\frac{-1}{2i}\ln(\frac{i+z}{i-z})=\frac{i}{2}\ln(\frac{i+z}{i-z}).$$

2. Sea $f(z)=\sqrt{|xy|}$ $(z=x+iy)$. Demuestre que valen las ecuaciones de Cauchy Riemann en $z=0$ pero que $f'(0)$ no existe. Justifique.

Solución:

Sea $f(x)=\sqrt{|xy|}=u(x,y)+iv(x,y)$, donde $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$ y $v(x,y)=0$. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \text{lím}_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=0=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)\\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \text{lím}_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=0=\frac{-\partial v}{\partial x}(0,0).\end{aligned}$$

Para ver que $f'(0)$ no existe observamos que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \text{lím}_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}\overline{z}}{|z|^2} \\ &= \text{lím}_{z\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}(x-iy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} - i\frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Si $y=0$, el límite es cero, esto es $f'(0)=0$.

Si $x=y>0$, obtenemos

$$\frac{x\sqrt{|x^2|}}{2x^2} - i\frac{x\sqrt{|x|^2}}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{ix^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Luego $f'(0)$ no existe.

3. Existe una función analitica $f=u+iv$ tal que $u(x,y)=e^{y/x}$?. Justifique.

Solución:

No, pues de lo contrario debe ser armónica, pero:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y/x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2}e^{y/x}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}e^{y/x} + \frac{y^2}{x^4}e^{y/x}.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}e^{y/x}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}e^{y/x}.$$

Así vemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0.$$

4. Halle una transformación de Möbius que deje fijos los puntos $\frac{1}{2}$ y 2, y que lleve el punto $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ en ∞.

Solución:

$$w = \frac{z(1-4i) - 2(1-i)}{2z(1-i) - (4-i)}.$$

5. Encuentre la expansión de la función $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ como una serie de Taylor en torno a $z = 0$ y halle el radio de convergencia.

Solución:

Sea $g(z) = \dfrac{z}{z+1}$ entonces $g'(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$ y así $z^2 g'(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

Recordemos ahora que para $|z| < 1$ tenemos

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Entonces

$$\frac{z}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}$$

y luego

$$g'(z) = (\frac{z}{z+1})' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) z^n.$$

De esta manera obtenemos, para $|z| < 1$ la expresión

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) z^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)(m-1) z^m.$$

6. Sea $w = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$. Demuestre que la preimagen de la familia $\mid w \mid = \lambda$ es una familia de circulos para cada $\lambda \neq 1$.

Solución:

Ya que $w\overline{w} = \lambda^2$, reemplazando tenemos que

$$(\frac{z-z_1}{z-z_2})(\overline{\frac{z-z_1}{z-z_2}}) = \lambda^2 \;\Leftrightarrow\; (z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1}) = \lambda^2(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z_2})$$

$$\Leftrightarrow\; z\overline{z} - z\overline{z_1} - z_1\overline{z} + z_1\overline{z_1} = \lambda^2(z\overline{z} - z\overline{z_2} - z_2\overline{z} + z_2\overline{z_2})$$

$$\Leftrightarrow\; (1-\lambda^2)z\overline{z} + z(\lambda^2\overline{z_2} - \overline{z_1}) + \overline{z}(\lambda^2 z_2 - z_1) + |z_1|^2 - \lambda^2|z$$

Por lo tanto es un círculo si $\lambda^2 \neq 1$, de lo contrario es una recta.

7. Halle una transformación de Möbius que lleve los puntos $-1, i, 1+i$ en los puntos $0, 2i, 1-i$ respectivamente.

Solución:

$$w = \frac{-2i(z+1)}{4z-1-5i}$$

8. Demuestre que la función $T(z) = zRe(z)$ es diferenciable sólo en $z = 0$ y halle $T'(0)$.

Solución:

$$\frac{T(z)-T(0)}{z-0}=\frac{zRe(z)}{z}=Re(z)\to_{z\to 0}0$$

Por lo tanto T diferenciable y $T'(0)=0$.

Veamos que no lo es en otro punto

$$\lim_{z\to z_0}\frac{T(z)-T(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{zRe(z)-z_0Re(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{z(z+\overline{z})-z_0(z_0+\overline{z_0})}{z-z_0}$$

Si

$$\begin{aligned}
z &= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{zz+z\overline{z}-z_0z_0-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}\\
&= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{zz-z_0z_0+z\overline{z}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}\\
&= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z+z_0z-z_0z_0+(z-z_0)\overline{z}+z_0\overline{z}-z_0\overline{z_0})}{z-z_0}\\
&= \tfrac{1}{2}\lim_{z\to z_0}(z+z-0+\overline{z}+z_0\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0})\\
&= \tfrac{1}{2}(z+z_0+\overline{z_0})+z_0\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{(z-z_0)}}{z-z_0}\\
&= \tfrac{1}{2}(z+z_0+\overline{z_0})+z_0\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}
\end{aligned}$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

no existe.

Note que lo anterior ocurre exepto si $z_0=0$

9. Halle el error en el siguiente argumento: "Ya que $(-z)^2 = z^2$ se tiene $2ln(-z) = 2ln(z)$ y luego $ln(-z) = ln(z) \quad (!)$." Justifique su respuesta.

Solución:

Si tenemos
$$(-z)^2 = z^2$$
entonces
$$\ln(-z^2) = \ln(z^2)$$
Si $z = re^{i\theta}$ entonces $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$ por lo cual $\ln(z^2)$ toma mas de un valor. En general

$$\ln(z^2) = \ln(r^2) + 2i\theta + 2k\pi i$$

$(k \in \mathbb{Z})$. Por otra parte

$$-z^2 = (-1)z^2 = e^{i\pi}r^2e^{2i\theta} = r^2e^{2\theta+\pi}$$

luego

$$\ln(-z^2) = \ln(r^2) + (2\theta + \pi)i + 2n\pi i = \ln(r^2) + 2\theta i + (2n+1)\pi i$$

$(n \in \mathbb{Z})$.
Así $\ln(-z^2)$ en general es diferente de $\ln(z^2)$

10. Encuentre el valor de

$$(3-4i)^{1+i}.$$

Solución:

En efecto $(3-4i) = \sqrt{9+16}e^{\arctan(-4/3)i} = 5e^{i\theta}$ con $\theta = \arctan(-4/3) = -\arctan(4/3)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(3-4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\ln(3-4i)} \\
&= e^{(1+i)(\ln(5)+i\theta)} \\
&= e^{\ln(5)+i\theta+i\ln(5)-\theta} \\
&= e^{\ln(5)-\theta}e^{i(\ln(5)+\theta)} \\
&= 5e^{-\theta}\cos(\ln(5)+\theta)+i\sin(\ln(5)+\theta) \\
&= 5e^{\arctan(4/3)}(\cos(\ln(5)-\arctan(4/3))+i\sin(\ln(5)-\arctan(4/3))
\end{aligned}$$

11. Halle todas las raices de la ecuación:

$$sen(z) = isenh(z)$$

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i} = i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \;&\Leftrightarrow\; e^{iz}-e^{-iz} = e^{-z}-e^{z}\\ &\Leftrightarrow\; \frac{e^{(1+i)z}-1}{e^{z}} = \frac{1-e^{(1+i)z}}{e^{iz}}\\ &\Leftrightarrow\; e^{iz}(e^{(1+i)z}-1) = e^{z}(1-e^{(1+z)z})\end{aligned}$$

Haciendo $u = e^{(1+i)z} = e^{z}e^{iz}$ entonces

$$\frac{u-1}{e^{z}} = \frac{1-u}{e^{iz}}$$

De aquí

$$u = -e^{2iz} = e^{i\pi+2iz} = e^{i(\pi+2z)}$$

Caso 1: $u = 1$

$e^{(1+i)z} = 1$ por lo tanto $z = \dfrac{2k\pi i}{1+i}$

Caso 2: $u = e^{i(\pi+2z)}$ por lo tanto $z = \dfrac{-(2k+1)\pi}{i+1}$

12. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y sea $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ fijo.

(i) Halle la expansión de $f(z)$ como una serie de Taylor en torno a $z = a$.

(ii) Encuentre todos los valores de a para los cuales la expansión en serie de la parte (i) constituye una continuación analitica de $f(z)$.

Solución:

(i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$f'(z) = 1(1-z)^{-2}$

$f''(z) = 1 \cdot 2(1-z)^{-3}$

...

$f^n(z) = n!(1-z)^{-(n+1)}$

Por lo tanto $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$

(ii) $a \in [0, 1)$

13. Considere la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(i) Expanda $f(z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = -1/2$.

(ii) Determine el dominio en el cual la función $f(z)$ es continuada analiticamente.

Solución:

(i) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln(1-z)$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+1/2)^n$ con $a_n = \frac{f^n(-1/2)}{n!}$

$f'(z) = \frac{-1}{1-z} = -(1-z)^{-1}$.

Así $f^{(n)}(z) = -(n-1)!(1-z)^{-n}$ con $n = 1, 2, ...$

Por lo tanto $f^{(n)}(-1/2) = -(n-1)!(3/2)^{-n}$ con $\frac{f^{(n)}(-1/2)}{n!} = (\frac{2}{3})^n \frac{1}{n}$.

Entonces

$$f(z) = \ln(3/2) + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n \frac{1}{n} (z+1/2)^n$$

(ii) $(R)^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}$. Por lo tanto $R = \frac{3}{2}$ y $|z+1/2| < 3/2$

14. Sean $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $g(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$. Observe que ambas series de potencia no tienen dominio de convergencia en común. Sin embargo:

(i) Demuestre que la función $g(z)$ es continuación analitica de la función $f(z)$.

Solución:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $g(z) = c\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$.

15. Evalue la integral $\int_{\gamma} |z| dz$ donde γ es el semicirculo $|z| = 1$, $-\pi/2 \leq arg(z) \leq \pi/2$ y el punto de partida es $z = i$. (la orientación de la curva es siempre positiva, esto es, en el sentido contrario a las manecillas del reloj).

Solución:

Tenemos que $\gamma(t) = e^{it}$ y $\gamma'(t) = ie^{it}$ con $|\gamma(t)| = 1$. Entonces

$$\int_\gamma |z|dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\gamma(t)|\gamma'(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma'(t)dt = \gamma(\pi/2) - \gamma(-\pi/2)$$

Donde $\gamma(\pi/2) = e^{i\pi/2} = i$ y $\gamma(-\pi/2) = -i$.
Así

$$\int |z|dz = i - (-i) = 2i$$

16. Evalue la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}dz$ donde γ es el circulo $|z| = 1$, y $\sqrt{-1} = i$ (esto significa que el punto de partida es $z = -1$)

Solución:

Tenemos

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\sqrt{\gamma(t)}}dt = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{it/2}dt = 2(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) = 4i$$

17. Evaluar la integral $\displaystyle\int_\gamma ln(z)dz$ donde γ es el circulo $|z| = 1$, y $ln(i) = \frac{\pi i}{2}$.

Solución

Tenemos

$$\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \ln(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} itie^{it}dt = -\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} te^{it} = -2\pi$$

18. Evaluar $\displaystyle\int_{|z|=1} z^{\alpha}dz$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $1^{\alpha} = 1$.

Solución:

$\int_{|z|} z^{\alpha}dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^{\alpha}\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} ie^{i\alpha t}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)t}dt.$

Así si

$\alpha = -1$

$$\int_{|z|=1} z^{\alpha} = 2\pi i$$

$\alpha \neq -1$

$$\int_{|z|=1} z^{\alpha} = \frac{1}{(\alpha+1)}(e^{2\pi i\alpha} - 1)$$

19. Si $|a| \neq R$, demuestre que $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$.

Solución:

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} = \int_0^{2\pi} \frac{Rdt}{|\gamma(t)-a||\gamma(t)+a|}$$

donde $\gamma(t) = Re^{it}$ con $0 < t < 2\pi$ y $|dz| = |\gamma'(t)dt| = Rdt$

Tenemos que

$$|\gamma(t)-a||\gamma(t)+a| = |Re^{it}-a||Re^{it}+a|$$

pero $|z-a| \geq ||z|-|a||$ y $|z+a| \geq ||z|+|a||$.

Así tenemos que

$$|\gamma(t)-a||\gamma(t)+a| = |\gamma(t)^2 - a^2| \geq ||\gamma(t)|^2 - |a|^2|$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rdt}{|\gamma(t)-a||\gamma(t)+a|} \leq \int_0^{2\pi} \frac{Rdt}{|R^2-|a|^2|} = \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}$$

20. Sea $z := re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ y γ un camino que une a 1 y z. Demuestre que $\displaystyle\int_1^z \frac{dw}{w} := \int_\gamma \frac{dw}{w} = ln(r) + i\theta + 2k\pi i$, donde k es un entero que indica cuantas veces el camino de integración da vueltas alrededor del origen.

Solución:

$\gamma(t) = (z-1)t + 1$ con $0 \leq t \leq 1$ y $\gamma'(t) = z - 1$.

Entonces

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^1 \frac{(z-1)}{((z-1)t+1)} dt = \ln(z) - \ln(1) = \ln(z) = \ln(r) + i\theta + 2k\pi i$$

21. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada y suponga que $z_0 \notin Traza(\gamma)$. Demuestre que $Ind_\gamma(z_0)$ es un número entero. Ayuda: Defina $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ por

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

y demuestre que la función $h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ es constante.

Solución:

Tenemos que

$$Ind_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt$$

Consideremos $g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{(\gamma(s)-z_0)}ds$; entonces si $h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t)-z-0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} h'(t) &= -e^{-g(t)}g'(t)(\gamma(t)-z_0) + \gamma'(t)e^{-g(t)} \\ &= -e^{`}-g(t)\frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)}(\gamma(t)-z_0) + \gamma'(t)e^{-g(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(t)$ es constante.

Por otro lado $h(0) = h(1)$ pero

$$h(0) = e^{-g(0)}(\gamma(0)-z_0) = (\gamma(0)-z_0)$$

y

$$h(1) = e^{-g(1)}(\gamma(1)-z_0) = e^{-g(1)}(\gamma(0)-z_0)$$

entonces

$$e^{-g(1)}(\gamma(0)-z_0) = (\gamma(0)-z_0)$$

y asi

$$e^{-g(1)} = 1$$

luego

$$g(1) = 2k\pi i$$

Por lo tanto

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} g(1) = k$$

22. Calcule $\int_\gamma \frac{ln(z)}{z^n} dz$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución:

$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^n}$ es analítica en el disco. Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{\ln(z)}{z^n} = 0$$

para todo $n \geq 0$

23. Calcule $\int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m} dz$ donde $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ y $m \in \mathbb{N}$.

Solución:

Sabemos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{(n+1)}}dw$$

entonces

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{m}}dw$$

Sea $f(z) = z^{1/m}$, entonces

$f'(z) = \frac{1}{m}z^{(1/m)} - 1$

$f''(z) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m} - 1)z^{(1/m)-2}$

$f'''(z) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m} - 1)(\frac{1}{m} - 2)z^{(1/m)-3}...$

$f^k(z) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m} - 1)(\frac{1}{m} - 2)...(\frac{1}{m} - (k-1))z^{(1/m)-k}$ Luego

$$f^{(m-1)}(w) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m} - 1)(\frac{1}{m} - 2)...(\frac{1}{m} - (m-2))z^{(1/m)-(m-1)}$$

Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m}dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!}f^{(m-1)}(1) = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)...(\frac{1}{m}-(m-2))$$

24. De una expansión en serie de potencias de $ln(z)$ en torno a $z = i$ y halle su radio de convergencia.

Solución:

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n\geq 0} z^n$$

si $|z| < 1$ entonces $\dfrac{1}{(1-iz)} = \sum_{n\geq 0}(iz)^n$ si $|z| < 1$

Así

$$\frac{1}{i(1-iz)} = \sum_{n\geq 0}(i)^{n-1}z^n$$

si $|z| < 1$.

Entonces

$$\frac{1}{(i+z)} = \sum_{n\geq 0}(i)^{n-1}z^n$$

si $|z| < 1$.

Luego

$$\ln(i+z) = \sum_{n\geq 0}(i)^{n-1}\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

si $|z| < 1$.

Por lo tanto

$$\ln(w) = \sum_{n\geq 0}(i)^{n-1}\frac{(w-i)^{n+1}}{n+1}$$

Si $|w-i| < 1$ el radio de convergencia es 1.

25. Verdadero o Falso: Existe una función analitica en $z = 0$ y que toma los siguientes valores en los puntos $z = \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, ...)$.

a) $0, 1, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1....;$

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{6}{7}, ..., \dfrac{n}{n+1}, ...?.$

Si la respuesta es afirmativa, encuentre explicitamente la función o, si es negativa, justifique apropiadamente.

Solución:

a) $f(1) = 0, f(1/2) = 1, f(3/2) = 0, f(1/4) = 1, ...$ No existe pues, $z_n = 1/n$, tal que $f(z_n) = 0$ para n impar y se tendra $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Contradicción con el hecho de que f es analítica.

b)$f(1) = 1/2, f(2) = 2/3, f(1/3) = 3/4, ...f(1/n) = \frac{n}{n+1}$

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z}$, cumple lo pedido, ya que $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{1+n}$

26. Suponga que al menos una de las desigualdades de Cauchy es una igualdad, esto es: $|c_k| = \dfrac{M(r)}{r^k}$. Demuestre que la función

$f(z)$ tiene la forma $f(z) = c_k z^k$.

Solución:

Consideremos

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c - 2z^2 + ...c_n z_{n+1}^{n+c} z^{n+1} + ...$$

Por hipotesis tenemos

$$|c_k| = \frac{|f^k(0)|}{n!} = Sup_{|w|=r}|f(w)|\frac{1}{r^k}$$

Entonces

$$Sup_{|w|=r}|f(w)| = r^k|\frac{f^(k)(0)}{n!}|$$

Así

$$|c_k| \leq \frac{M(r)}{r^n} = \frac{r^k|c_n|}{r^n} = \frac{|c_k|}{r^{n-k}} \rightarrow_{r\to\infty} 0$$

con $n \neq k$. Por lo tanto

$$f(z) = c_k z^k$$

27. Demuestre que si f es una función no constante, analitica en un dominio Ω y $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su minimo valor en el interior del dominio Ω.

Solución:

Sea $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, g analítica y no constante en Ω. Entonces por el

Principio del Módulo Máximo, $|g(z)|$ no puede alcanzar su m'aximo valor en Ω. Pués

$$Sup_{z\in\Omega}|g(z)| = Sup_{z\in\Omega}|\frac{1}{f(z)}| = Inf_{z\in\Omega}|f(z)|$$

Por lo tanto $|f(z)|$ no puede alxcanzar su mínimo valor en Ω

28. Halle $Res(\frac{1}{\sqrt{2-z}+1};1)$.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{2-z}+1} = \frac{\sqrt{2-z}-1}{(2-z)-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{\sqrt{2-z}}{z-1}$$

y $\sqrt{2-z} = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + ...$, pues $\sqrt{2-z}$ es analítica en $z=1$ asi tendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} - \frac{\sqrt{2-z}}{z-1} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}(\pm 1 + a_1(z-1)) + ... \\ &= \frac{1}{z-1} \pm \frac{1}{z-1} - a_1 - a_2(z-1) + ... \\ &= \frac{1 \pm 1}{z-1} - a_1 - a_2(z-1) + ... \end{aligned}$$

Por lo tanto 0 y 2 son los residuos en $z=1$

29. Evalúe

$$\int_{|z|=3} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})dz.$$

Solución:

Hay tres singularidaddes esenciales:

$z = 0, 1, 2$ dentro de $|z| = 3$

$Res(f, 0) = Res((1 + z + z^2)e^{1/z}, 0)$ pues el resto es analítica en $z = 0$.

Además

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + ...$$

.

Entonces

$$\begin{aligned}(1 + z + z^2)e^{1/z} &= (1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!}\frac{1}{z^3 3!} + ...) \\ &+ (z + 1 + \frac{1}{z2!} + \frac{1}{z^3 3!} + ...) + (z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{z3!} + ...) \\ &= \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...)\end{aligned}$$

Por lo tanto $Res(f, 0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ...$

Por otro lado $Res(f, 1) = Res((1 + z + z^2)e^{1/(z-1)}, 1)$ pues el resto es analítica en $z = 1$.

Además

$$e^{1/(z-1)} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + ...$$

y $(1+z+z^2) = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2$ con

$$a_0 = g(1) = 3, a_1 = \frac{g'(1)}{1!} = 3, a_2 = \frac{g''(1)}{2!} = 1$$

así:

$$(3+3(z-1)+(z-1)^2)e^{1/(z-1)} = 3 + \frac{3}{(z-1)} + \frac{3}{2!(z-1)^2} + ...+$$

$$3(z-1) + 3 + \frac{3}{2!(z-1)} + ... + (z-1)^2 + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{1}{(z-1)}(3 + \frac{3}{2} + 1) + ...$$

Entonces $Res(f,1) = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}$

30. Evalúe

$$\int_{|z|=r} \frac{z^3}{2z^4+1} dz.$$

Solución:

En efecto

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{z^3}{z^4+\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{2}(ceros - polos) = \pi i$$

2. Evalúe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... \\
\sin \frac{1}{z} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ... \\
\sin^2 \frac{1}{z} &= (\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ...)(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ...) \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + ...
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Res(f, 0) = 0$$

y así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \sin^2(\frac{1}{z}) = 0$$

31. Halle $Res(\frac{z^a}{1-\sqrt{z}}; 1), \quad a \in \mathbb{R}.$

Solución:

$$\frac{z^{\alpha}}{1-\sqrt{z}} \cdot \frac{1+\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} = \frac{-(1+\sqrt{z})z^{\alpha}}{z-1}.$$

Ademaás

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{z}) &= a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + ... \\
z^{\alpha} &= e^{a\ln z} = b_0 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + ... \\
(1+\sqrt{z}) &= c_0 + c_1(z-1) + c_2(z-1)^2 + ...
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{-(1+\sqrt{z})z^{\alpha}}{z-1} = \frac{-c_0}{z-1} + c_1 + c_2(z-1) + ...$$

donde $f(z) = (1+\sqrt{z})z^{\alpha}$ y así $f(1 \pm 1)e^{2k\pi ia}$.

Por lo tanto

$$Res(\frac{z^{\alpha}}{1-\sqrt{z}}, 1) = f(1 \pm 1)e^{2k\pi ia}$$

32. Sea f una función analitica en el circulo $|z| < 1$ y suponga que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$.

i) Demuestre que $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$.

ii) Suponga que $|f(z)| = |z|$ en al menos un punto interior del circulo. Demuestre que $f(z) = e^{i\alpha}z$ (α real).

Solución:

i) Sea $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$, entonces g es analítica para $|z| =< 1$ ya que $f(0) = 0$. Además si $|z| < 1$ entonces $|g(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$. Por el principio de Módulo Máximo entonces $|g(z)| \leq |z|$

ii) Demostremos que si $|f(z_0)| = |z_0|$ para un punto $|z_0| < 1$ entonces $f(z) = e^{i\alpha} z$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

En efecto si $|g(z_0)| = 1$ entonces el máximo se alcanza en un punto interior de $|z| < 1$ y por lo tanto g es constante y $|f(z)| = |c||z|$ para $|z| < 1$.

Ahora $|c| = 1$ evaluando en z_0. Por lo tanto $c = e^{i\alpha}$ y $g(z) = e^{i\alpha}$. Así $f(z) = e^{i\alpha} z$

33. Verdadero o Falso: Existe una función analitica en $z = 0$ y que satisface:

$$f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^2}? \quad (n \in \mathbb{N})$$

Si la respuesta es afirmativa, encuentre explicitamente la función o, si es negativa, justifique apropiadamente.

Solución:

i) $f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n^2} = 0$ y $f(\frac{-1}{n}) - \frac{1}{n^2} = 0$ con $n \in \ltimes$.

Sea $g(z) = f(z) - z^2$ con ceros en $z = \frac{1}{n}$.además $g(0) = 0 - 0 = f(0) \neq 0$.

Por lo tanto $f(z) = z^2$, hace lo anterior y es analítica en $z = 0$

34. Evalue : $\displaystyle\int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4 - 1} dz; \quad a > 1.$

Solución:

$$\frac{z}{(z)^4 - 1} = \frac{z}{(z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)}$$

Entonces

$$\int_{|z-a|=a} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

donde $f(z) = \dfrac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}$ es analitica en $|z - a| < a$

35. Evalue : $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz; \quad$ si a está en el interior de la curva C.

Solución:

Tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw$$

Aquí $f''(a) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^3}dw$ con $f(w) = we^w$.

Entonces

$$f'(w) = e^w + we^w$$

$$f''(w) = 2e^w + we^w$$

Así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz = \frac{2e^a + ae^a}{2} = (1 + a/2)e^a$$

36. Calcule una expansión de la función $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ en serie de Laurent en una vecindad de $z = \infty$.

Solución:

Sea $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$. La expanción en torno a $z = \infty$ es por definición, la expanción de $f(\dfrac{1}{z})$ en torno de $z = 0$. Así

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 2} = \frac{z}{1-2z} = z \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

si $|z| < \dfrac{1}{2}$. Haciendo $w = \dfrac{1}{z}$ se obtine

$$f(w) = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\frac{1}{w})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{w^{n+1}}$$

si $|w| > 2$ que es la expresión pedida.

37. Calcule una expansión de la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, donde $0 < |a| < |b|$, en serie de Laurent en una vecindad de:

i) $z = 0$

ii) $z = a$

Solución:

i) En $z = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{(a-z)(b-z)} \\
&= \frac{1}{(b-a)}(\frac{1}{(a-z)} - \frac{1}{(b-z)}) \\
&= \frac{1}{(b-a)}(\frac{1}{a}(\frac{1}{1-\frac{z}{a}}) - \frac{1}{b}(\frac{1}{1-\frac{z}{b}})) \\
&= \frac{1}{(b-a)}(\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^n} - \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}) \\
&= \frac{1}{(b-a)}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z^n}{a^{n+1}} - \frac{z^n}{b^{n+1}})) \\
&= \frac{1}{(b-a)}(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{(a^{n+1}b^{n+1})})
\end{aligned}$$

para $|z| < |a|$

ii) En $z = a$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{(a-z)(b-z)} \\
&= \frac{1}{(a-z)(b-a+a-z)} \\
&= \frac{1}{(a-z)}\frac{1}{(b-a)(1+\frac{a-z}{b-a})} \\
&= \frac{1}{(a-z)(b-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a-z)^n}{(b-a)^n} \\
&= \frac{1}{(a-b)}(\frac{1}{(z-a)}\sum_{n=0}^{\infty})\frac{(z-a)^n}{(b-a)^n} \\
&= \frac{1}{(a-b)}(\frac{1}{(z-a)}(1+\frac{(z-a)}{(b-a)}+\frac{(z-a)^2}{(b-a)^2}+...)) \\
&= \frac{1}{(a-b)}(\frac{1}{(z-a)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+a}})
\end{aligned}
$$

si $|z-a| < |b-a|$

38. Encuentre y clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}.$$

Solución:

$$\frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2}\cos(\frac{1}{z-2}) = \frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2(1+\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+...)}$$

Por lo tanto $z=-2$ es polo de orden 2 y $z=2$ es singularidad esencial.

39. Encuentre y clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right).$$

Solución:

Si $\sin\frac{1}{z} = 0$ entonces $\dfrac{e^{/z}-e^{-i/z}}{2i} = 0$ y si $e^{2i/z} = 1$ entonces $z = \dfrac{1}{k\pi}$.

Por lo tanto $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ son todas las singularidades de $f(z)$

40. Sea f una función analitica en el circulo $|z|<1$ y suponga

que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$. Demuestre que $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$. (Comentario: El resultado se conoce como Lema de Schwarz).

Solución:

Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z}$; entonces g es analítica aún en $z = 0$ pues $f(0) = 0$.

Por el principio del módulo máximo tenemos

$$Sup_{|z|<1}|g(z)| = Sup_{|z|=1}|g(z)| = Sup_{|z|=1}\frac{f(z)}{z} = Sup|f(z)|$$

Ya que $|f(z)| \leq 1$ se obtiene $Sup_{|z|<1}|g(z)| \leq 1$.

Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$

41. Expandir la función $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en serie de Laurent en torno a:

(i) El punto $z_0 = 0$.

(ii) El punto $z_0 = 1$.

Solución:

i)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\\
&= \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^n\\
&= \frac{1}{z}+1+z+z^2+...
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\\
&= \frac{-1}{(-1+1-z)}+\frac{1}{1-z}\\
&= \frac{1}{1-(1-z)}+\frac{1}{1-z}\\
&= \frac{1}{1-z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n\\
&= \frac{1}{1-z}+1+(1-z)+(1-z)^2+...
\end{aligned}
$$

42. Halle y clasifique las singularidades de las siguientes funciones. Justifique su respuesta.

(i) $\dfrac{1}{z-z^3}$.

(ii) $\dfrac{1}{e^z - 1}$

Solución:

i) $\dfrac{1}{(z-z^3)} = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$ tiene 3 singularidades;$z=0, z=1, z=-1$

$z=0$ es polo de orden 1 pues si $|z|<1$ tenemos

$$\frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{z}(1+z^2+z^4+...) = \frac{1}{z}+z+z^3+...$$

$z=1$ es polo de orden 1 pues

$$\frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{(1-z)(z(1+z))} = \frac{g(z)}{(1-z)}$$

donde $g(z) = \dfrac{1}{z(1+z)}$ es analítica en $z=1$.

Entonces

$$\frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{1-z}(a_0+a_1(1-z)+a_2(1-z)^2)+... = \frac{a_0}{1-z}+a_1+a_2+...$$

$z=-1$ es polo de orden 1, se prueba de manera análoga.

ii) $z = 0$ y $e^z = 1$ son las singularidades, esto es $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora veamos de que tipo son

$z = 0$:

Sea

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{(1 + z + \frac{z^2}{2!} + ...) - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + ...} = \frac{1}{z(1 + \frac{z}{2!} + ...)} = \frac{g(z)}{z}$$

donde $g(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{z}{2!} + ...}$ es analítica en $z = 0$.

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2) + ... = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + ...$$

luego

$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{e^z - 1} = \frac{-1}{z} + \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + ...$$

donde $a_0 = g(0) = 1$. Por lo tanto $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z} = a_1 + a_{2z} + ...$

Así $z = 0$ es singularidad reparable.

$z = 2k\pi i$

tenemos que

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2k\pi i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-2k\pi i)^n \\ &= 1+(z-2k\pi i)+\frac{(z-2k\pi i)^2}{2!}+... \end{aligned}$$

Entonces

$$e^z-1=(z-2k\pi i)(1+\frac{(z-2k\pi i)}{1!}+...)$$

de aqui tenemos

$$\frac{1}{(e^z-1)}=\frac{h(z)}{(z-2k\pi i)}$$

donde $h(z)=\dfrac{1}{1+\dfrac{(z-2k\pi i)}{2!}+...}$ es analítica en $z=2k\pi i$.

Así $z=2k\pi i$ es un polo de orden 1 de $\dfrac{1}{e^z-1}$ y también de $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$

43. Evaluar:

$$\int_{|z|=3}\frac{z}{\sin(z)(1-\cos(z))}dz.$$

Solución:

Vemos que las singularidades son $z = 0$, $z = \pi$, $z = -\pi$ y además

$$\begin{aligned} Res(f, 0) &= 0 \\ Res(f, \pi) &= \tfrac{-\pi}{2} \\ Res(f, -\pi) &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\int_{|z|=5} \frac{z}{\sin(z)(1 - \cos(z))} dz = 2\pi i(0) = 0$$

44. Determine el número de raíces de la función

$$f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2,$$

en el interior del circulo $|z| < 1$.

Solución:

Consideremos $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 2$ y $g(z) = -8z$.

Entonces $|f(z)| \leq 6 < 8 = |g(z)|$ en $|z| = 1$.

Por lo tanto tiene una sola raiz.

45. Supongamos que f es analitica en $\mathbb{D}(0,2)\backslash\{0\}$ y que para cada número natural $n \geq 0$ se cumple que

$$\int_{|z|=1} z^n f(z)dz = 0.$$

Demuestre que en tal caso $z = 0$ es una singularidad reparable de f.

Solución:

Si

$$b_n = \int_{|z|=1} z^n f(z)dz = 0$$

Por lo tanto f tiene una singularidad reparable en $z = 0$, pues $f(z) = b_0 + b_1 z + ...$

46. Halle los residuos de la función $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ con respecto a todos sus puntos singulares.

Solución:

Vemos que los puntos singulares son $z = 0$ poolo de orden 2 y $z = 1$ polo de orden 1.

Entonces tenemos

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-1}{z^2} = 1$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z^2+z-1}{z-1}) = 0$$

47. Halle $Res(f\circ\phi, a)$ si ϕ es analitica en $z=a, \phi'(a)\neq 0$, y f tiene un polo simple en $w=\phi(a)$ con residuo A.

Solución:

Tenemos lo siguiente

$$f(w) = \frac{A}{w-\phi(a)} + a_0 + a - 1(w-\phi(a)) + ...$$

Entonces

$$f(\phi(z)) = \frac{A}{\phi(z)-\phi(a)} + a_0 + a_1(\phi(z)-\phi(a)) + ...$$

donde $\phi(z) = \phi(a) + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + ...$ con $b_1 = \phi'(a) \neq 0$.

Así

$$(f\circ\phi)(z) = \frac{A}{b_1(z-a)(1+\frac{b_2}{b_1}(z-a)+...)} = \frac{A}{\phi'(a)(z-a)} + ...$$

entonces

$$Res(f \circ \phi, a) = \frac{A}{\phi'(a)}$$

48. Evalue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} sen(\frac{1}{z})dz.$$

Solución:

Sabemos que $\sin w = w - \dfrac{w^3}{3!} + ...$

Entonces

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + ...$$

luego

$$Res(\sin\frac{1}{z}, 0) = 1$$

.

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\sin\frac{1}{z}dz = 1$$

49. Evalue
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n e^{2/z} dz$$
siempre que $n \geq -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} e^w &= 1 + w + \frac{w^2}{2!} + ... \\ e^{2/z} &= 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2} + ... \\ z^n e^{2/z} &= z^n + 2z^{n-1} + \frac{2^2 z^{n-2}}{2!} + ... \frac{2^k z^{n-k}}{n!} + ... \end{aligned}$$

Entonces $Res(z^n e^{2/z}, 0) = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

50. Sea $a \in \mathbb{R}, \quad a > 1$. Calcule
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + cos\theta}.$$

Solución:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{(a+\frac{z+\overline{z}}{2})iz}dz=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2az+1}dz$$

Observamos que $z^2+2az+1=(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})$.

Así

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta=\frac{4\pi}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

51. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xsenx}{x^2+2x+2}dx.$$

Solución:

Sea $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}$ en donde $z^2+2z+2=0$ si y sólo si $z=-1+i$ y $z=-1-i$, luego consideramos $\gamma=C_R\bigcup[-R,R]$.

Entonces

$$\int_{\gamma}f(z)dz=\int_{C_R}f(z)dz+\int_{-R}^{R}f(x)dx$$

Notar que $\int_{C_R}f(z)dz\to 0$ por Lema de Jordan. Por otra parte

$$\int_{\gamma}\frac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}dz=2\pi iRes(f,-1+i)=\pi(-1+i)e^{-1-i}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2+2x+2}dx=\pi(-1-i)e^{-1-i}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx=\frac{\pi}{e}(\cos 1+\sin 1)$$

52. Evaluar $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz.$

Solución:

Vemos que $z=0$ es polo de orden 2, $z=\pm 3$ son polos de orden 1 y $z^2-9=(z-3)(z+3)$ que no estan en el interior de $|z=1|$. Luego

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz=2\pi iRes(f,0)=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z^2e^z}{z^2(z^2-9)})=\frac{-2\pi i}{9}$$

53. Evaluar $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\cos t}$ donde $a>1$. Ayuda: Hacer $z=e^{it}$.

Solución:

Sea $z = e^{it}$ entonces $2\cos t = e^{it} + e^{-it} = z + \frac{1}{z}$, entonces $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ y como $dz = ie^{it}dt$ entonces $dt = \frac{1}{iz}dt$.

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t}dt = \frac{2}{i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{z(2a + z + \frac{1}{z})}dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}dz$$

Como $z^2 + 2az + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ donde $a^2 - 1 > 0$ observamos que sólo $-a + \sqrt{a^2 - 1}$ está en el interior de $|z| = 1$. Luego

$$Res(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1}) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

Así

$$\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}dz = \frac{2}{i}2\pi i Res(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a+\sqrt{a^2 - 1}) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

54. Evaluar $\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}dx$.

Solución:

Vemos que las singularidades son polos simples en $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z -$

$2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$, $z - 4 = e^{i7\pi/4}$. Consideremos la curva $\gamma = C_R \bigcup [-R, R]$, entonces tenemos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

donde

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f, e^{i\pi/4}) + 2\pi i Res(f, e^{3\pi i/4}) = \pi\sqrt{2}$$

y por Lema de Jordan

$$\int_{C_R} f(z)dz \to 0$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi\sqrt{2}$$

Como el argumento es una función par entonces podemos escribir

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

55. Halle el número de raíces de la ecuación $z^4 - 8z + 10 = 0$ que se encuentran en el anillo $1 < |z| < 3$.

Solución:

a) $f(z) + g(z) = z^4 - 8z + 10$ con $f(z) = z^4 - 8z$ y $g(z) = 10$, entonces $|f(z)| \leq 9 < 10 = |g(z)|$ en $|z| = 1$. Por lo tanto no tiene raíces en $|z| < 1$.

b) $f(z) + g(z) = z^4 - 8z + 10$ con $f(z) = -8z + 10$ y $g(z) = z^4$, entonces $|f(z)| \leq 8|z| + 10 = 34 < 3^4 = |g(z)|$ en $|z| = 3$. Por lo tanto tiene 4 raíces en $|z| < 3$.

De lo anterior vemos que $z^4 - 8z + 10$ tiene 4 raíces en $1 < |z| < 3$

56. Sea f una función analitica en el semiplano superior $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ y tendiente a cero cuando $z \to \infty$ para z perteneciente a $\mathbb{H}^+$. Demuestre que para cada $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$ se tiene

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Ayuda:

Demuestre que

$$f(z) = \frac{1}{1\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-z)} dx$$

y que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-\overline{z})} dx$$

Solución:

Por fórmula de Cauchy en el camino $\gamma(t) = t$ con $-\infty < t < \infty$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}dw = f(z) siz \in \mathbb{H}^+ 0 siz \mathbb{H}^+$$

Y notamos que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-z)}dx$$

A fin de ver lo pedido, restamos y obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-infty}^{\infty} (\frac{1}{(t-z)} - \frac{1}{(t-\overline{z})}) f(t)dt$$

donde

$$(\frac{1}{(t-z)} - \frac{1}{(t-\overline{z})}) = \frac{z-\overline{z}}{t^2 - t\overline{z} - tz + |z|^2} = \frac{2iy}{t^2 - 2tx + x^2 + y^2}$$

con $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$ Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2 + y^2}dt$$

Luego si $u(z) = Ref(z)$, esto es , $u(x,y) = Ref(x,y)$ entonces $f(t) = f(t,0) = u(t,0)$. Así

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y2}u(t,0)dt$$

Además $u(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to \infty$

57. Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2+a^2}dx, \quad a>0.$$

Solución:

Usamos que $f(z)=\dfrac{e^iz}{z^2+a^2}$ y las singularidades son $z=\pm ia$ donde sólo $ia\in\Omega$

(Ω semicircunferencia de radio a sobre el eje real).

Por lo tanto

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi iRes(f,ia) = 2\pi i \lim_{z\to ia}\frac{(z-ia)ez}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$$

y por el otro lado

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-a}$$

58. Sea w una raíz n-ésima de la unidad (i.e $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$,, $j = 1, 2, ...(n-1)$)

i)Encuentre $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} w^j$

ii)Encuentre $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (j + +1)w^j$

Solución

i)

$$\sum_{j=0}^{n-1} w^j = 1 + w + ... + w^{n-1} = \frac{1-w^n}{1-w} = 0$$

ya que $w \neq 1$ y $w^n = 1$

ii)

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)w^j = 1 + 2w + 3w^2 + ...nw^{n-1}$$

Notar que $(1 + 2w + 3w^2 + ...nw^{n-1})(1-w) = 1 + w + ...w^{n-1} + nw^n$

Luego

$$1 + 2w + ...nw^{n-1} = \frac{(1 + w + ...w^{n-1}) + nw^n}{1-w} = \frac{0 + nw^n}{1-w} = \frac{n}{1-w}$$

59. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ definida por $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$, donde $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$

i)Encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$

ii)Encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial z}$

Solución:

i)

$$f(z) = \frac{z}{1+\sqrt{z\overline{z}}}$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{-z\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|z|)}{(1+|z|)^2}$$

Ahora

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

entonces

$$2|z|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|z|) = z$$

así

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|z|) = \frac{z}{2|z|}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\frac{-z^2}{2|z|}}{(1+|z|)^2} = \frac{-z^2}{2|z|(1+|z|)^2}$$

ii)

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1(1+|z|)-z\frac{\partial}{\partial z}(|z|)}{(1+|z|)^2}$$

pero

$$|z|^2=z\overline{z}$$

entonces

$$2|z|\frac{\partial}{\partial z}(|z|)=\overline{z}$$

así

$$\frac{\partial}{\partial z}(|z|)=\frac{\overline{z}}{2|z|}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2+|z|}{2(1+|z|)^2}$$

60. Encuentre los valores de z para los cuales es convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{1+z})^n$$

Solución:

Sea $w=\dfrac{z}{1+z}$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{1+z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}w^n$$

que converge sólo si $|w| < 1$. Luego la serie pedida converge sólo si $|\dfrac{z}{z+1}| < 1$

61. Si $|z| = 1$, demuestre que $|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}| = 1$ con $a, b \in \mathbb{C}$

Solución

Como $|z| = 1$, entonces $z\overline{z} = 1$ y $z = (\overline{z})^{-1}$. Luego

$$\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} = \frac{az+b}{(\overline{b}+\overline{z}\overline{a})z}$$

así tendremos

$$|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}| = |\frac{az+b}{\overline{a}\overline{z}+\overline{b}}|\frac{1}{|z|} = |\frac{az+b}{\overline{az+b}}| = \frac{|az+b|}{|\overline{az+b}|} = \frac{|az+b|}{|az+b|} = 1$$

62. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ dos curvas cerradas de clase C^1 y $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)|$$

para cada $t \in [0,1]$. Demuestre que $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$.

Ayuda:Considere la curva

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z}$$

con $t \in [0,1]$ y compruebe que la trayectoria está contenida en $\mathbb{D}(1,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$

Solución:

Notemos que $z \notin Traza(\gamma_0) \bigcup Traza(\gamma_1)$, por lo tanto $Ind_{\gamma_0}(z)$ y $Ind_{\gamma_1}(z)$ están bien definidos. Tambien vemos que γt es de clase C^1 y cerrada pues $\gamma(1) = \gamma(0)$.

Observemos que

$$|\gamma(t) - 1| = |\frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z} - 1| = \frac{|\gamma_1(t)| - \gamma_0(t)}{|\gamma_0(t) - z|} < 1$$

luego $Traza(\gamma) \subseteq \mathbb{D}(1,1)$ y por propiedades de Indice concluimos que $Ind_\gamma(0) = 0$.

Así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt &= \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)(\gamma 0(t)-z)-\gamma' 0(t)(\gamma_1(t)-z)}{(\gamma_1(t)-z)(\gamma_0(t)-z)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-z}dt \\
&= Ind_{\gamma_1(z)} - Ind_{\gamma_0(z)}
\end{aligned}$$

63. Sea γ la frontera del cuadrado encerrado por las cuatro rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Calcule:

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2+8}dz$

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{2z+1}dz$

iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}dz$

Solución:

i) Vemos que $\dfrac{\cos z}{z^2+8}$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, por lo tanto es holomorfa en Ω, y así $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2+8}dz = 0$ por el Teorema de Cauchy.

ii) Vemos que $\dfrac{z}{2z+1}$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{-1/2\}$, luego por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$\int_\gamma \frac{z}{2z+1}dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{z}{z+\frac{1}{2}}dz = \frac{-\pi i}{2}$$

iii) Usnado la fórmula integral de Cauchy para la tercera derivada tenemos

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\frac{\partial^3(\cosh z)}{\partial z^3} = \frac{\pi i}{3}\sinh(0) = 0$$

64. Sea f analítica. Suponga que Ref es constante. Demuestre que f es constante.

Solución:

$f = u + iv$ y por definición u es constante.

Si f es analítica entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Así v es constante y entonces f es constante.

65. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$

i) en el semicirculo $z = 1$, $y \geq 1$, $\sqrt{1} = 1$

ii)en el semicirculo $|z| = 1$, $y \geq 1$, $\sqrt{1} = -1$

Solución:

i) $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$, entonces

$$\int_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{it/2}}dt = i\int_0^\pi e^{it/2}dt = 2(e^{i\pi/2} - 1) = -2(1 - i)$$

ii)$\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$, entonces

$$\int_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{it/2}e^{i\pi}}dt = \frac{i}{e^{i\pi}}\int_0^\pi e^{it/2} = (-1)2(i - 1) = 2(1 - i)$$

66. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ si:

i)El punto $z = 0$ está en el interior y el punto $z = 1$ está en el exterior de la curva γ

ii)El punto $z = 1$ está en el interior y el punto $z = 0$ está en el exterior de la curva γ

iii) Los puntos $z = 0$ y $z = 1$ están en el interior de la curva γ

Solución:

i)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}f(z)dz = f(0) = 1$$

con $f(z) = \dfrac{e^z}{(1-z)^3}$

ii)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^3}f(z)dz = \frac{1}{2}f''(1) = \frac{-e}{2}$$

con $f(z) = \dfrac{-e^z}{z}$

iii)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-e^z}{z(z-1)^3}dz = Res(f,0) + Res(f,1)$$

donde

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{-e^z}{(z-1)^3} = 1$$

y

$$Res(f,1) = -\lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}((z-1)^3\frac{e^{-z}}{z(z-1)^3}) = \frac{-e}{2}$$

Así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = 1 - \frac{e}{2}$$

67. Sea f analitica en $\mathbb{D}$. Suponga que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Demuestre que $|f'(0)| \leq 1$.

Obs. $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Solución:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

con $\gamma(t) = re^{it}$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

Entonces

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^2}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^2e^{2it}}rie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}dt$$

Luego

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{r}dt \leq \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{r}$$

para todo $r < 1$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ cuando $r \to 1-$

68. Suponga que f es entera y que existen $M > 0, R > 0, n \geq 1$ tales que

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

para $|z| > R$. Demuestre que f es un polinomio de grado $\leq n$.

Solución:

Como $f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ y

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(0)| &\leq \frac{k!M(r)}{r^k} \\ &\leq k!Mr^{n-k} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $(n-k) \leq 0$ y donde $M(r) = max_{|z|=r}|f(z)| \leq Mr^n$ para $r > R$.

Por lo tanto f es un polinomio de grado a lo mas n

69. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existe constante positiva M tal que

$$|f(z)| \leq M|z|^{1/2}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

Solución:

Sea $0 < r$. Si $|z| \leq r$, entonces $|f(z)| \leq Mr^{1/2}$.

Luego por la Desigualdad de Cauchy

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r)$$

con $M(r) = max_{|z|=r}|f(z)| \leq Mr^{1/2}$.

Entonces

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^{n-1/2}} \to 0$$

para todo $n \geq 1$.

Así $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$, por lo tanto f es constante.

6.2. Ejercicios propuestos

1. Resuelva la ecuación:

$$\overline{z} = z^{n-1}$$

donde $n \neq 2$ es un número natural.

2. Demuestre la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \quad \leq \quad | arg(z) | \ .$$

(ayuda: Use el hecho que: $1 - cos\theta \leq \theta^2/2$)

3. Demuestre que:

$$| z + w |^2 + | z - w |^2 = 2(| z |^2 + | w |^2).$$

4. Hallar todas las soluciones de $(z-i)^3 = -1$.

5. Hallar $(1+i)^{12}$.

6. Determinar la imagen de la banda $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ \ 0 < y < 1\}$ bajo la transformación

$$f(z) = \frac{i}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad z = x + iy,$$

representando geométricamente tanto la banda como la imagen.

7. Hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $Im(z) = 0$.

8. Hallar la imagen de la recta $x + y = 1$ mediante la transformación de Möbius

$$w = \frac{z+1}{z-1}.$$

9. Hallar las partes real e imaginaria de z^z.

10. Demostrar que

$$|Im(1 - \overline{z} + z^2| < 3$$

si $|z| < 1$.

11. Demostrar que si $z \neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

12. Determinar la imagen del cuadrante $x > 1,\ y > 0$ por la inversión

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad z = x + iy.$$

13. Determínense todos los polinomios armónicos de la forma

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule una función $v(x, y)$ para la que la función $f(z)$ definida por

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$$

sea analitica en $\mathbb{C}$.

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto del eje real. Demostrar que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analitica si y sólo si la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ es analitica.

15. Expresar la función inversa $w = sen^{-1}(z)$ por medio de un logaritmo.

16. Hallar la imagen del triángulo rectángulo $-x < y < x;\ 0 < x < 1$ mediante la transformación $w = z^2$.

17. Hallar una transformación de Möbius que deje 1 e i fijos y lleve 0 a -1.

18. Sea u una función armónica. Una función v tal que $f = u+iv$ es analitica se llama función armónica conjugada de u. Halle una función armónica conjugada de $u(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$.

19. Hallar las partes real e imaginaria de z^z.

20.Halle la imagen del circulo $|z| = 1$ bajo la transformación $T(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

Solución:

Podemos escribir:

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$$

Así tendremos

$$T(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} = \frac{e^{i\theta}}{(1-2e^{i\theta}+e^{2i\theta})} = \frac{1}{2(\cos(\theta)-1)} < 0$$

con

$$\frac{1}{2(\cos(\theta)-1)} \in \mathbb{R}$$

21. Explique por que la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ de la fun-

ción real $\dfrac{1}{1+x^2}$ converge para $|x| < 1$ pero diverge para $x = 1$, aún cuando $\dfrac{1}{1+x^2}$ es infinitamente derivable para todo valor de x.

22. Hallar la imagen de la circunferencia $|z-1| = 1$ mediante la inversión.

23. Determinar la imagen de la banda $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ \ 0 < y < 1\}$ bajo la transformación

$$f(z) = \frac{i}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad z = x + iy,$$

representando tanto la banda como la imagen.

24. Hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $Im(z) = 0$.

25. Demuestre que la función

$$f(z) = ze^{\overline{z}},$$

no es analitica.

26. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demuestre que la función

$$f(z) = ze^{\overline{z}},$$

no es analitica.

27. Sea $f(z) = x^2 + iy^2$. Determine donde $f'(z)$ existe y halle su valor.

28. Demuéstre que la función $u(x, y) = \cosh y \sin x$ es armónica en el plano y construya otra función armónica $v(x, y)$ para la que

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

sea analitica en $\mathbb{C}$.

29. Calcule $\displaystyle\int_\gamma (x - y + iy^2)dz$ si γ es el segmento de recta que une 0 a $1 + i$.

30. Justifique porque $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ puede definirse de modo que sea analítica en cualquier dominio simplemente conexo dado, que no contenga los puntos $z = 1$ y $z = -1$.

31. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z - 1}dz$ donde γ es el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$ e $y = 1$.

32. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z + 1}{(z - 1)^3(z - 4)}dz$, donde γ es el círculo de centro 0 y radio 2.

33. a) Encuentre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

sea una función armónica.

b) Encuentre una función $v(x, y)$ tal la que la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy,$$

sea analitica en cada punto de $\mathbb{C}$.

34. Sea Ω un abierto simétrico con respecto del eje real. Demuestre que f es analitica en Ω si y sólo si la función g definida como

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})},$$

es analitica en Ω.

35. Determine el conjunto de todos los puntos del plano donde cada una de las siguientes funciones es analitica, calculando además las derivadas en esos puntos.

a) $a(z) = z^2\overline{z}$

b) $b(z) = |z| Re\overline{z}$

c) $c(z) = \overline{z}^2 z$

d) $d(z) = \overline{z} Rez$.

36. Aplicando la definición de derivada, demuestre que, si $f(z) = Re(z)$, entonces $f'(z)$ no existe en ningún punto.

37. Demuestre que $arcsen(z) = -iln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$, y encuentre una expresión análoga para $arccos(z)$.

38. Sea $a < b$. Determinar la imagen del rectángulo

$$Q := [a, b] \times [-\pi, \pi]$$

bajo la acción de la función exponencial.

39. Resuelva la ecuación $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

40. Calcule $(1 - i)^{4i}$.

41. Demuestre que $ln(1 + i)^2 = 2ln(1 + i)$.

42. Determine el desarrollo en serie de potencias (Taylor) centrado en cero de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)^n}, \qquad |z| < 1,$$

donde $n \geq 1$ es un número natural arbitrario.

43. Suponiendo que $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, determinar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$,

donde $k \geq 1$ es un número natural.

44. Demuestre que existe una única función $u(z)$ definida por una serie

$$u(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia positivo tal que $u(0) = 2$ y, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$u'(z) = u(z) - 1.$$

45. Demuestre que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \sinh z} = \frac{-1}{3}\pi i.$$

46. Si f entera y $\dfrac{|f(z)|}{1+|z|^k} \leq M$ para cierto k. Entonces f es un polinomio de grado a lo más k.

47. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z \in \Omega, R > 0$ tal que $\overline{D}_R(z) \subset \Omega$ y f analitica. Demuestre que para cada número natural $n \geq 0$ se verifica la siguiente identidad:

$$\int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{1}{n!} \int_{|w-z|=R} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z} dw.$$

48. Clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{sen^3(\pi z)}.$$

49. Sea Ω abierto conexo y f analitica no constante y sin ceros en Ω. Demuestre que $|f|$ no tiene minimos locales en (el interior de) Ω.

50. Calcule el número de raíces del polinomio $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en el disco $|z| < 1$.

51. Calcule el valor de la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz.$$

52. Sea Ω un abierto conexo y f analitica en Ω tal que

$$f(\Omega) \subset \Omega \text{ y } f(z) = f(f(z))$$

para cada $z \in \Omega$. Demuestre que para cada $z \in \Omega$ se cumple

$$f(z) = z$$

a menos que f sea constante.

53. Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analitica. Suponga que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para cada $z \in \Omega$. Demuestre que ya sea $f(z_0) = 0$ o bien f es constante.

54. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y no constante. Demuestre que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

55. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen constantes positivas A, B y k tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es un polinomio.

56. Clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^2}{sen^3(\pi z)}.$$

En particular, determine el dominio donde f es holomorfa.

57. Sea f analitica en $\mathbb{D}(0,1)$. Suponga que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Demuestre que $|f'(0)| \leq 1$.

58. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz$; $\gamma(t) = re^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ para cada valor posible de r en los siguientes casos:

a) $0 < r < 2$;

b) $2 < r < \infty$.

59. Halle y clasifique los puntos singulares de la función $f(z) = \sin(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z^2}$.

60. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{i\theta};\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Hallar $\displaystyle\int_\gamma (\frac{z}{z-1})^n dz;\ \ n \geq 1$

61. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz;\ \ \gamma(t) = re^{it};\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$ para cada valor posible de r: $0 < r < 2;\ \ 2 < r < \infty$.

62. (2 puntos) Sea γ el camino $[1, i]$ y σ el camino $[1, 1+i, i]$. Calcule $\int_\gamma f$ y $\int_\sigma f$ con $f(z) = |z|^2$.

63. Sean $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $g(z) = i\pi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$. Observe que ambas series de potencia no tienen dominio de convergencia en común. Sin embargo:

(i) Demuestre que la función $g(z)$ es continuación analitica de la función $f(z)$.

64. Sea f analitica en un dominio acotado por una curva cerrada simple C que contiene al origen. Demuestre que para cualquier elección de la rama de $Ln(z)$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f'(z) Ln(z) dz = f(z_0) - f(0),$$

donde z_0 es el punto de partida de la integración.

65. Determine el desarrollo en serie de potencias (Taylor) cen-

trado en cero de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}, \qquad |z| < 1,$$

donde $n \geq 1$ es un número natural arbitrario.

66. Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} cosxdx = e^{1/4}\sqrt{\pi}$.

Sugerencia: Recuerde que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ y considere el camino de la figura siguiente

67. Escriba el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

en la región $0 < |z-1| < 2$.

68. Si f entera y $\dfrac{|f(z)|}{1+|z|^k} \leq M$ para cierto k. Entonces f es un polinomio de grado a lo más k.

69. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)}$$

en $0 < |z| < R$.

70. Determinar y clasificar todas las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{sen^3(\pi z)}.$$

71. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=6} \frac{dz}{1 - cosz}$.

72. Calcule $Res(\dfrac{e^z}{1 - cosz}, 0)$.

73. Calcule la integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

74. Evalúe $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{sen(\pi z^2) + cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$.

75. Evalúe $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$.

76. Sea C una elipse con ecuación $9x^2 + y^2 = 9$ orientada positivamente. Calcule

$$\int_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\pi/z}\right) dz.$$

77. Suponga que f es una función analítica en todo punto de $\mathbb{C}$. Demuestre que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r),$$

para cada $r > 0$, donde $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

78. Sea f analítica en un abierto Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ y suponga que existe $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$. Demuestre que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

79. (2 puntos) Demuestre que $arcsen(z) = -iln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$, y encuentre una expresión análoga para $arccos(z)$.

80. Resuelva la ecuación $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

81. Calcule $(1 - i)^{4i}$.

82. Demuestre que $ln(1 + i)^2 = 2ln(1 + i)$.

83. Sea f analítica en todo punto de $\mathbb{C}$ y acotada, esto es: existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| < M \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demuestre que f es constante. (Ayuda: Use el problema 1)

84. Sea f analítica en un abierto Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ y suponga que existe $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$. Demuestre que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

85. Determinar y clasificar todas las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{sen^3(\pi z)}.$$

86. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=6} \frac{dz}{1-cosz}$.

87. Demuestre que todas las raíces de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ están entre los circulos $|z| = 1$ y $|z| = 2$.

88. Evalúe $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$.

89. Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} dx = \pi(1-\frac{1}{e})$

Sugerencia: Calcule $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} dz$ en un camino apropiado.

90. Verdadero o Falso: Existe una función analitica en $z = 0$ y que toma los siguientes valores en los puntos $z = \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, ...)$.

i) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, ..., 0, \frac{1}{2k} ....;$

ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, ...?$.

91. Calcule $\int_\gamma \frac{z+1}{(z-1)^3(z-4)}dz$, donde γ es el círculo de centro 0 y radio 2.

92. Sea $y > 0$. Demuestre que para cada $x \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{s^2+t^2}ds = \frac{\pi}{t}e^{-tx}.$$

93. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$ y $b > 0$. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{sen(ax)}{x}dx = \pi(e^{-ab} - \frac{1}{2}).$$

94. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

95. Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos(3\theta)}{5-4cos(\theta)}d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

96. Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3sen(\theta))^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

97. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{cos(mx)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}, \quad m > 0.$$

98. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{cosh(ax)}{cosh(x)}dx = \frac{\pi}{2cos(\pi a/2)}, \qquad \text{donde } |a| < 1.$$

99. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, y holomorfa en $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Demuestre que f es analitica en $\mathbb{C}$ (esto es, entera).

Ayuda: Use el teorema de Morera.

100. Calcule la integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz.$$

101. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)}$$

en $0 < |z| < R$.

102. Calcule

$$\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sen^2(z)} dz.$$

103. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

Ayuda: Considere la integral como una integral de linea en la circunferencia $|z| = 1$, aplicando luego el teorema de residuos.

104. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^4+4} dx, \quad a > 0.$$

105. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{ln(x)}{(1+x)^3} dx.$$

Ayuda: Calcule la integral de $\dfrac{z^\alpha}{(1+z)^3}$ para $0 < \alpha < 1$ en un contorno adecuado, para obtener el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^3} dx$. Luego, derive con respecto a α y tome el limite cuando $\alpha \to 0$.

106. Sea Ω una región acotada del plano complejo con frontera γ orientada positivamente y suponga que $f(z)$ es una función analitica en Ω excepto por polos simples en $a_1, a_2, ..., a_n$. Sea $g(z)$ una función analitica en Ω. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(a_k)Res(f; a_k)$$

107. Evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos(3\theta)}{5 - 4cos(\theta)}d\theta$$

108. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

Ayuda: Ponga $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ y considere la integral como una integral de linea en la circunferencia $|z| = 1$. Use que $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ y $d\theta = \frac{1}{iz}dz$, aplicando luego el teorema de residuos.