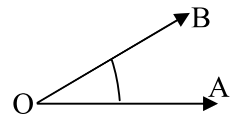
TRIGONOMETRI

Penyusun : Dra. Nuning Sulistyowati
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

I. Pengukuran Sudut

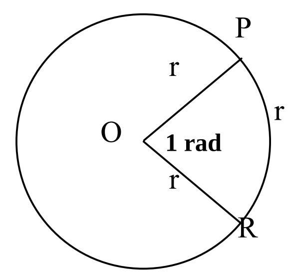
Sebelum membahas satuan pengukuran sudut,kita ulang terlebih dahulu tentang pengertian sudut. ***Sudut*** adalah suatu daerah yang dibatasi oleh dua sinar(garis) yang bersekutu pada titik pangkalnya. Perhatikan pada gambar dibawah ini:



Garis $\overrightarrow{OA}$ dan garis $\overrightarrow{OB}$ bersekutu di titik O
Membentuk sudut AOB ditulis $\angle AOB$
Sudut satu putaran penuh 360^0 atau 2π radian(dalam radian). Dengan demikian besar sudut satu derajat (1°) didefinisikan sebagai ukuran sudut yang besarnya $\frac{1}{360}$ putaran penuh dapat dituliskan :

$$1° = \frac{1}{360°}\ putaran$$

Ukuran sudut lainnya adalah radian.
Satu radian(1 rad) didefinisikan sebagai besarnya sudut pusat suatu lingkaran yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran tersebut (lihat gambar).



Dapat dituliskan besar $\angle$ POR adalah 1 rad.
Untuk satu putaran penuh nilainya sama dengan keliling lingkaran yaitu $2\pi r$,oleh karena itu

$$1 \text{ putaran penuh} = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Hubungan derajat dan radian

$$2\pi \text{ rad} = 360^0$$
$$\pi \text{ rad} = 180^0$$
$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}3^0 \qquad \text{atau} \qquad 1° = \frac{\pi}{180°}\ radian$$

<u>Contoh</u>

1.Ubahlah besar sudut dalam satuan derajat ke dalam satuan radian

a. $30^0 = \frac{30°}{180°} \times \pi\ rad = \frac{1}{6}\ \pi\ rad$

b. $90^0 = \frac{90°}{180°} \times \pi\ rad = \frac{1}{2}\ \pi\ rad$

2. Ubahlah besar sudut dalam satuan radian ke dalam satuan derajad

a. $\frac{1}{4}\ \pi\ rad = \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{180°}{\pi} = 45°$

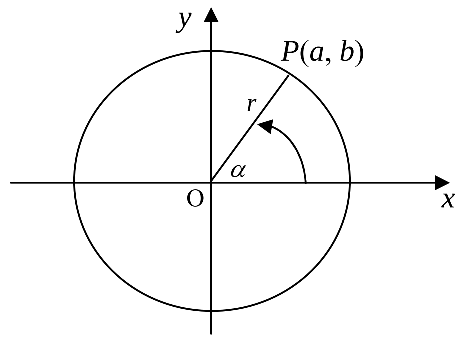
b. $\frac{2}{3}\ \pi\ rad = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{180°}{\pi} = 120°$

II. NILAI PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DARI SUATU SUDUT

Trigonometri terdiri dari sinus(sin), cosinus(cos), tangens(tan), cotangens(cot), secan(sec), dan cosecan(cosec). Trigonometri merupakan nilai perbandingan yang dapat didefinisikan pada koordinat Cartesius atau segitiga siku-siku.

Misal lingkaran L berjari-jari r. Titik $P(a, b)$ terletak pada lingkaran L dan $OP = r$, OP membentuk sudut α dengan sumbu x positif.

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} = \left(\frac{ordinat}{jari-jari}\right)$$



$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \left(\frac{absis}{jari-jari}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \left(\frac{ordinat}{absis}\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \left(\frac{absis}{ordinat}\right)$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \left(\frac{jari-jari}{absis}\right)$$

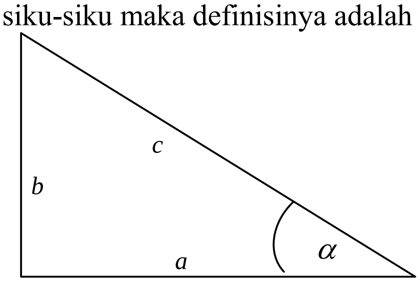
$$cosec\,\alpha = \frac{r}{y} = \left(\frac{jari-jari}{ordinat}\right)$$

Jika trigonometri didefinisikan dalam segitiga siku-siku maka definisinya adalah sebagai berikut:

$\sin a = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{b}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \frac{c}{a}$

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{a}{b}$

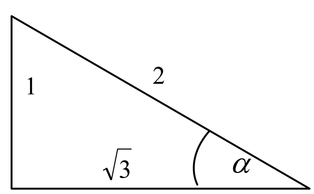


<u>Contoh</u>

Jika sin $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $0^O < \alpha < 90^O$, tentukan nilai $\cos\alpha$ dan $\tan\alpha$

Jawab:

sin $\alpha = \frac{1}{2}$ dapat digambarkan pada segitiga siku-siku.



$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

1. Nilai Trigonometri Untuk Sudut-Sudut Istimewa

Di dalam trigonometri ada 5 sudut yang dikategorikan sudut istimewa. Kelima sudut tersebut adalah sudut-sudut yang besarnya 0^O , 30^O, 45^O , 60^O , 90^O. Nilai trigonometri untuk sudut-sudut istimewa ini disajikan pada tabel berikut:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
Cosec α	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
Sec α	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
Cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

A. Rumus-Rumus Identitas Trigonometri

✓ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

✓ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

✓ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

✓ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

✓ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

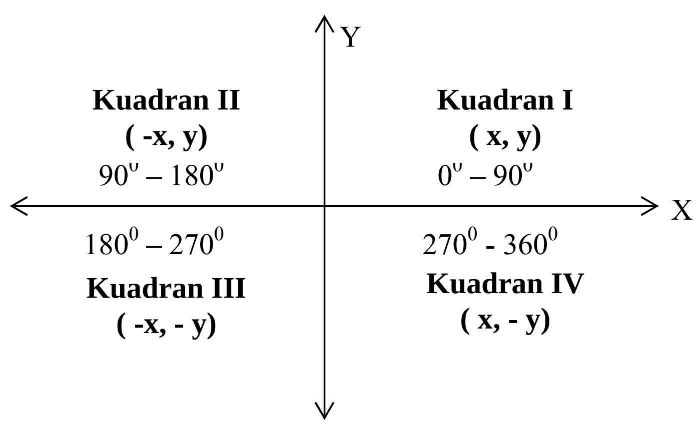
✓ $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

✓ $\cot^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$

B. Perbandingan trigonometri suatu sudut di berbagai kuadran.

1. *Sudut pada kuadran*

Sumbu-sumbu pada koordinat membagi bidang koordinat menjadi empat daerah yang disebut dengan kuadran. Sehingga besar sudut α dapat dikelompokkan menjadi 4 daerah seperti yang terlihat pada gambar berikut :



Pembagian sudut pada tiap kuadran :

Kuadran I $= 0^o < \alpha < 90^o$

Kuadran II $= 90^o < \alpha < 180^o$

Kuadran III $= 180^o < \alpha < 270^o$

Kuadran IV $= 270^o < \alpha < 360^o$

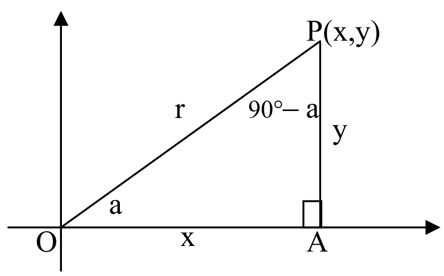
Dari gambar tersebut nilai (tanda) perbandingan trignometri diberbagai kuadran dapat dilihat pada tabel sebagai berikut :

Perbandingan Trigonometri	Kuadran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
Sinus α	+	+	-	-
Cosinus α	+	-	-	+
Tangen α	+	-	+	-
Cosecan α	+	+	-	-
Secan α	+	-	-	+
Tangen α	+	-	+	-

2. *Sudut Berelasi*

a. Sudut di kuadran I ($0^o < x < 90^o$)

Perhatikan segitiga OAP di kuadran I dan titik P (x,y)



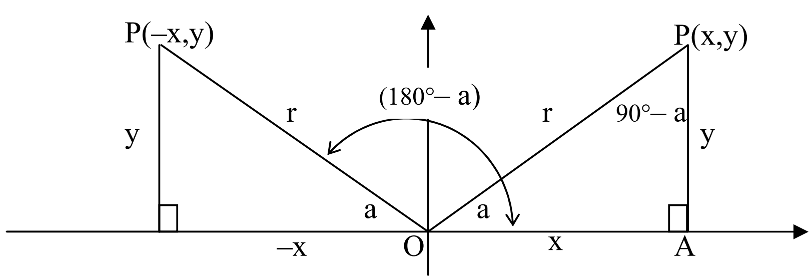
Sin a^o = y/r
Cos a^o = x/ r
Tan a^o = y/ x
Sin (90^o - a) = x/r
Cos (90^o - a) = y/r
Tg (90^o - a) = x/y

Dapat disimpulkan bahwa :

Sin (90^o – a) = Cos a^o
Cos (90^o – a) = Sin a^o
Tan (90^o – a) = Cot a^o

b. Sudut di kuadran II ($90^o < x < 180^o$)

Perhatikan segitiga OAP di kuadran I, titik P (x,y) dan titik p' (-x,y)



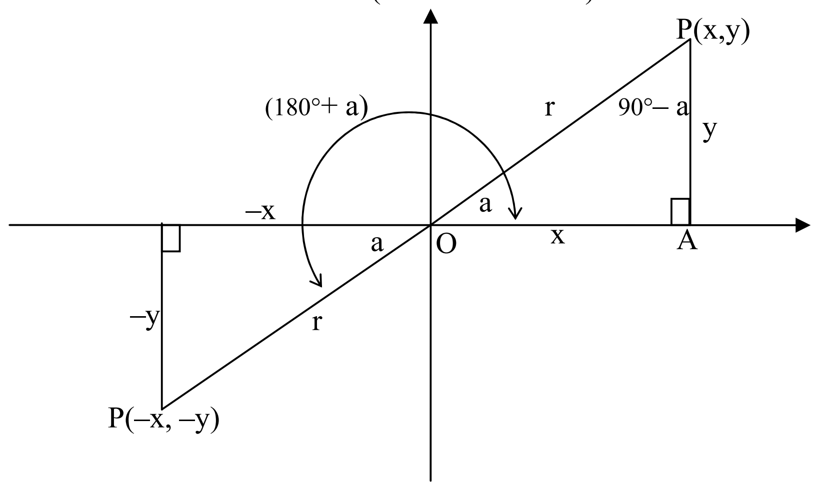
Sudut di kuadran I
Sin a^o = y/r
Cos a^o = x/r
Tan a^o = y/x

Sudut di kuadran II
Sin (180^o – a) = y/r
Cos (180^o – a) = – x/r
Tan (180^o – a) = y/–x

Dari beberapa rumusan diatas dapat disimpulkan :

Sin (180^o – a^o) = Sin a^o
Cos (180^o – a^o) = – Cos a^o
Tan (180^o – a^o) = – Tan a^o

c. Sudut di kuadran III ($180^o < x < 270^o$)



Perhatikan segitiga OAP di kuadran I dan titik P (x,y) dan titik P' (–x, –y) di kuadran III. Diperoleh relasi sebagai berikut :

Sudut di kuadran I	Sudut di kuadran III
$\text{Sin } a^o = y/r$	$\text{Sin } (180^o + a) = -y/r$
$\text{Cos } a^o = x/r$	$\text{Cos } (180^o + a) = -x/r$
$\text{Tan } a^o = y/x$	$\text{Tan } (180^o + a) = y/x$

Dari beberapa rumusan diatas, dapat disimpulkan :

$$\text{Sin } (180^o + a^o) = -\text{Sin } a^o$$
$$\text{Cos } (180^o + a^o) = -\text{Cos } a^o$$
$$\text{Tan } (180^o + a^o) = \text{Tan } a^o$$

d. Sudut di kuadran IV ($270^o < x < 360^o$)

Dengan cara yang sama didapat hubungan(relasi) sebagai berikut :

$$\text{Sin } (360^o - a^o) = -\text{Sin } a^o$$
$$\text{Cos } (360^o - a^o) = \text{Cos } a^o$$
$$\text{Tan } (360^o - a^o) = -\text{Tan } a^o$$

Contoh :

1. Tentukan nilai trigonometri berikut :
   a. $\text{Sin } 60^0$
   b. $\text{Sin } 120^0$
   c. $\text{Cos } 210^0$
   d. $\text{Tan } 240^0$
   e. $\text{Sin } 315^0$
   f. $\text{Cos } 300^0$

   Jawab :

   a. $\text{Sin } 60^0 = \text{Sin } (90^0 - 30^0) = \text{Cos } 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   b. $\text{Sin } 120^0 = \text{Sin } (180^0 - 60^0) = \text{Sin } 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

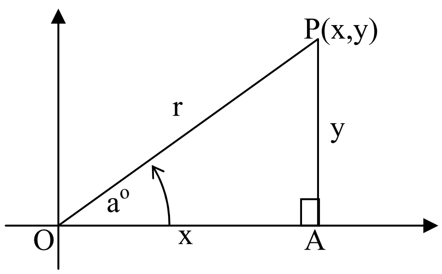
   c. $\text{Cos } 210^0 = \text{Cos } (180^0 + 30^0) = -\text{Cos } 30^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\text{Tan } 240^0 = \text{Tan } (180^0 + 60^0) = \text{Tan } 60^0 = \sqrt{3}$

e. $\text{Sin } 315^0 = \text{Sin } (360^0 - 45^0) = -\text{Sin } 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f. $\text{Cos } 300^0 = \text{Cos } (360^0 - 60^0) = \text{Cos } 60^0 = \frac{1}{2}$

C. Hubungan Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub/Polar.



a. Merubah Koordinat Cartesius ke Koordinat Kutub

Diketahui koordinat P(x, y) →P(r, a°) = …..?

Lihat ΔOAP siku-siku di A

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{Tan } a^o = \frac{y}{x}$

$a^o = \text{arc Tan}\left(\frac{y}{x}\right)$

b. Merubah Koordinat Kutub ke Koordinat Cartesius

Diketahui koordinat P(r, a°) →P(x, y) = …..?

Lihat ΔOAP siku-siku di A

$\text{Sin } a^o = \frac{y}{r}$; $\text{Cos } a^o = \frac{x}{r}$

$y = r \text{ Sin } a°$; $x = r \text{ Cos } a°$

Contoh

1.Tentukan koordinat kartecius dari titik A(2,135^0)

Jawab

$x = r \text{ Cos } a°$
$= 2 \cos 135^0$
$= 2 \cos(180^0 - 45^0)$
$= 2. -\cos 45^0$
$= 2 . -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$= -\sqrt{2}$

$y = r \text{ Sin } a°$
$= 2 \sin 135^0$
$= 2 \sin (180^0 - 45^0)$
$= 2 \sin 45^0$
$= 2 . \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$= \sqrt{2}$

Jadi Koordinat kartecius titik A($-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)

2.Tentukan koordinat kutub dari titk B(- 2, 2)

Jawab

$r = \sqrt{-2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\tan a° = \frac{y}{x} = \frac{2}{-2} = -1$

a = arc tan(–1) maka $a = 135^0$ (dikuadran II sin (+) dan cos (-))

Jadi koordinat kutub titik B($2\sqrt{2}$,135^0)

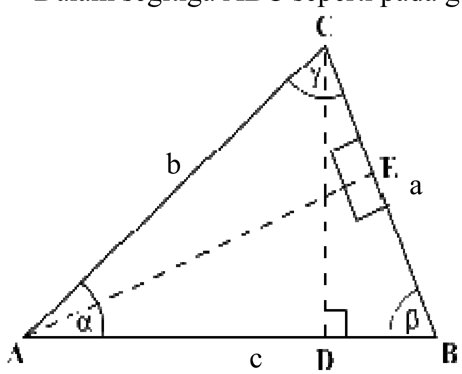
<u>Latihan 1</u>

1. Nyatakan dalam bentuk derajat :
   a $\frac{5}{9}\pi$ rad   b. $\frac{3}{2}\pi$ rad   c. $\frac{3}{10}\pi$ rad   d. $\frac{7}{6}\pi$ rad
2. Nyatakan dalam bentuk radian :
   a. 120^0 b. 175^0 c. 72^0 d. 48^0
3. Tentukan nilai berikut :
   a.Sin 150^0 c.tan 330^0 e. Cos $\frac{5}{4}\pi$
   b.Cosec 45^0 d.Sin $\frac{5}{2}\pi$ f. Sin $\frac{5}{3}\pi$
4. Hitunglah nilai dari :
   a. $\text{Cos}\frac{2}{3}\pi - \text{Cos}\frac{5}{3}\pi + \text{Sin}\ \frac{2}{3}\pi$
   b. $\text{Sin } 60^0.\text{Cos } 330^0 + \tan 225^0$
   c. $(\text{Cos } 300^0 - \text{Sin } 210^0) \times (\text{Cos } 300^0 + \text{Sin } 210^0)$
   d. $\dfrac{\tan 150° + \cos 60°}{\tan 150° - \cos 60°}$
   e. Jika Cot ß $= \frac{4}{3}$, tentukan nilai trigonometri berikut:
      * Sin ß dan tg ß.   * Sec ß dan Ctg ß.
      * $(\text{Sin ß})^2 + (\text{Cos ß})^2$ * Cos ß dan Cosec ß
5. Nyatakan titik –titik berikut dalam koordinat kutub !
   a. A($4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$)   b. B(5,6)   c. C(-5, $-5\sqrt{3}$)   d.D(-2,$2\sqrt{3}$)
6. Nyatakan titik-titik berikut dalam koordinat Cartecius
   a. A(6,30^0)   b.(9,150^0)   c.C(12,240^0)   d.D(4,150^0)

III. Aturan Sinus dan Kosinus

a.Aturan Sinus

Dalam segitiga ABC seperti pada gambar berikut :



Dalam Δ ADC, kita tentukan panjang *DC* ditinjau dari Sin α

Sin α = $\frac{DC}{AC}$ maka DC = AC Sin α $\rightarrow$ DC = b Sin α 1

Dalam ΔBDC,*kita tentukan panjang DC* ditinjau dari Sin β

Sin β = $\frac{DC}{BC}$ maka DC = BC Sin β $\rightarrow$ DC = a Sin β.......2

Dari persamaan 1 dan 2 :

DC = DC

b Sin α = a Sin β

$\frac{a}{Sin\ \alpha} = \frac{b}{Sin\ \beta}$ 1

Sama dengan diatas coba tentukan panjang AE jika ditinjau dari Sin β dan Sin γ.

Sin β $= \frac{AE}{AB} \rightarrow$ AE = AB Sin β maka AE = c. Sin β *dan*

Sin γ $= \frac{AE}{AC}$ →AE = AC Sin γ maka AE = b. Sin γ

Dari kedua pernyataan diatas diperoleh :

c. Sin β = b. Sin γ $\leftrightarrow \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ 2

Sehingga dari pers. 1 dan 2 diperoleh aturan sinus berikut :

$$\frac{a}{Sin\alpha} = \frac{b}{Sin\beta} = \frac{c}{Sin\gamma}$$

Contoh :

1. Diketahui : Δ PQR dengan sisi p = 10 cm dan q = 10 cm, $\angle P = 60^0$ dan $\angle Q = 30^0$

Tentukan : a. ∠R ,

b.panjang sisi r

Jawab :

a. $\angle R = 180^0 - (\angle P + \angle Q)$

$= 180^0 - (60^0 + 30^0)$

$= 90^0$

b. Panjang sisi r $\rightarrow \frac{p}{\sin P} = \frac{r}{\sin R}$

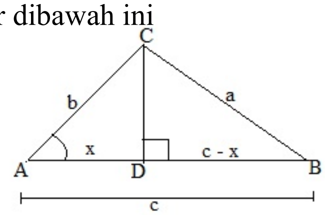
$\frac{10}{\sin 60^0} = \frac{r}{\sin 90^0}$

r $= \frac{10 . \sin 90^0}{\sin 60^0}$

r $= \frac{10.1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{20}{3}\sqrt{3}$ cm

b. Aturan Cosinus

Dalam Segitiga ABC sembarang telah diketahui ukuran sebuah sudut dan dua sisi yang mengapitnya.Bagaimana menentukan panjang sisi lainnya?perhatikan gambar dibawah ini



Pada gambar diatas Δ ABC segitiga lancip dan CD ⊥ AB

Misal AD = x maka BD = (c – x)

Pada Δ ADC ; CD^2 =.........(1)

Pada Δ BDC ; $CD^2 = a^2 - (c - x)^2$ =...... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$CD^2 = CD^2$

$b^{2-}x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$

$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$

atau

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.....(3)

Dalam Δ ADC → Cos A $= \frac{x}{b} \rightarrow x = b \cos A$........(4)

Dari persamaan(3) dan(4) → $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Dengan cara yang serupa dapat kita buktikan pula bahwa :
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ dan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
Aturan Cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Contoh :

1. Diketahui segitiga ABC panjang AB = 7 cm,AC = 8 cm,dan BC = 5 cm besar sudut-sudut segitiga ABC.

   Jawab :

   Misal AB = c = 7 cm,AC = b = 8 cm, BC = a = 5 cm

   $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \gamma$

   Degan aturan cosinus diperoleh

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

   $\leftrightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{(2)(8)(7)} = \frac{88}{112} = 0{,}7857$

   Jadi α = arc cos 0,7857 $\rightarrow$ $\alpha = 38{,}21°$

   Sudut β dapat ditentukan dengan cara berikut :

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

   $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

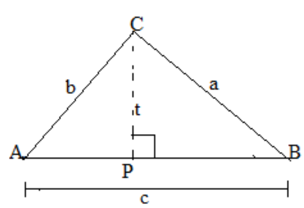
   $= \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2.5.7} = \frac{74 - 64}{70} = \frac{10}{70} = 0{,}1429$

   Jadi β = arc cos 0,1429 $\leftrightarrow \beta = 81{,}79^0$

   Dengan demikian, kita dapat menentukan γ yaitu :

   $\gamma = 180^0 - 38{,}21^0 - 81{,}79^0 = 60^0$

c. Luas Segitiga



Misal diketahui segitiga ABC sembarang

Jika panjang alas dan tinggi segitiga diketahui maka kita dapat menentukan luas daerah yaitu:

$$L = \frac{1}{2} \text{ x alas x tinggi}$$

:

Rumus luas segitiga tersebut dapat dikembangkan menjadi luas segitiga yang lain dengan menggunakan

Unsur trigonometri.

- $L = \frac{1}{2}$x alas x tinggi

  $L = \frac{1}{2}$ x c x t

Pada segitiga ACP $\leftrightarrow$ Sin A = $\frac{t}{b}$ $\rightarrow$ t = b.sin A

Sehingga L = $\frac{1}{2}$ x c .b.sin A

- L = $\frac{1}{2}$ x alas x tinggi

  L = $\frac{1}{2}$ x c x t

  Pada segitiga BPC $\leftrightarrow$ Sin B = $\frac{t}{a}$ $\rightarrow$ t = a.sin B

  Sehingga L = $\frac{1}{2}$ x c .a.sin B

- Pada aturan sinus berlaku :

  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\leftrightarrow$ Sin B = $\frac{b.\sin C}{c}$

  L = $\frac{1}{2}$ x a.c.sin B $\leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ x a.c. $\frac{b.\sin C}{c}$

  Sehingga, L = $\frac{1}{2}$ x a.b.sin C

- Berdasarkan penjelasan diatas,Luas daerah segitiga ABC dapat ditentukan apabila panjang dua sisi dan satu sudut apitnya diketahui.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}.a.b.\sin C$$
$$\text{Luas } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}.a.c.\sin B$$
$$\text{Luas } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}.b.c.\sin A$$

Luas segitiga ABC dapat pula ditentukan apabila panjang ketiga sisinya diketahui

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dengan S = $\frac{1}{2}$ keliling = $\frac{1}{2}$ (a+b+c)

Contoh :

1. Tentukan luas segitiga ABC jika diketahui a = 3 cm,b = 6 cm,dan $\angle C = 45^0$

   Jawab :

   L = $\frac{1}{2}$a.b. sin C = $\frac{1}{2}$3.6.sin 45^0 = $\frac{1}{2}$ 18 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm^2

2. Tentukan luas segitiga ABC bila diketahui panjang sisi- sisinya, masing-masing AB = 4 cm,AC = 5 cm dan BC = 7 cm!

   Jawab :

   Keliling segitiga = AB + AC + BC

   = 4 + 5 + 7 = 16 cm

   Sehingga :

   S = $\frac{1}{2}$ x 16 = 8 cm

   L = $\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}$

   L = $\sqrt{8.4.3.1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ cm^2

Latihan 2.

Kerjakan soal-soal berikut dengan benar!

1. Dari segitiga ABC , jika diketahui dengan panjang a = 2 cm, panjang b = $2\sqrt{3}$ cm, dan besar sudut $C = 30^O$. Tentukan Panjang sisi c = ...
2. Pada segitiga PQR sudut P = 30^0,p = 4 cm,dan q = 5 cm.Tentukan $\angle Q, \angle R$ dan panjang sisi r !
3. Pada segita ABC,diketahui BC =4 cm,AC = 5cm dan $\angle C = 45^0$,Tentukan panjang AB dan besar sudut B!
4. Suatu segitiga ABC diketahui $\angle A = 45^0$, $\angle B = 65^0$ jika panjang c = 18 cm.Tentukan luas segitiga tersebut!
5. Tentukan luas segitiga ABC,jika diketahui panjang AB = 10 cm, BC = 8 cm,dan AC = 6 cm.
6. Dalam segitiga PQR diketahui panjang PQ = 6 cm dan PR = 10 cm jika luas segitiga PQR = $15\sqrt{3}$ cm^2,tentukan panjang QR tersebut!
7. Pada segitiga ABC diketahui $\angle A = 50^0$, $\angle B = 70^0$,dan panjang b = 12 Tentukan panjang sisi a dan c

IV. Rumus-Rumus Fungsi Trigonometri Untuk Jumah dan Selisih Dua Sudut

a. $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

b. $\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

c. $\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

d. $\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$

e. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$

f. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$

Contoh

1. Hitunglah Cos 15^0 dan Cos 105^0 tanpa menggunakan tabel matematika atau kalkulator.

   Jawab :

   a.Cos 15^0 $= \text{Cos}(45-30)^0$
   $= \cos 45^0.\cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$
   $= (\frac{1}{2}\sqrt{2})(.(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$
   $= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
   $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

   b. Cos 105^0 $= \text{Cos}(60^0 + 45^0)$
   $= \cos 60^0 \cos 45^0 - \sin 60^0 \sin 45^0$
   $= \frac{1}{2}.(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - (\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}\sqrt{2})$
   $= \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$
   $= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

2. Buktikan bahwa cos $(\frac{\pi}{4}+a)$ + cos $(\frac{\pi}{4}-a) = \sqrt{2}$ cos a

   Bukti :

   Ruas kiri $= \cos(\frac{\pi}{4}+a) + \cos(\frac{\pi}{4}-a)$

   $=(\cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a) + (\cos\frac{\pi}{4}\cos a + \sin\frac{\pi}{4}\sin a)$

   $= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos a$

   $= 2(\frac{1}{2}\sqrt{2})\cos a$

   $= \sqrt{2}\cos a$

   = Ruas kanan (terbukti)

3. Hitung nilai Sin 75^0 tanpa menggunakan kalkulator atau tabel matematika

   Jawab :

   Sin $75^0 = \text{Sin}(45^0 + 30^0)$

   $= \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

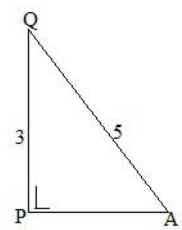
   $= (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$

   $= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

   $= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

4. Diketahui sin A $= \frac{3}{5}$,cos B $= \frac{12}{13}$,sudut A dan B lancip.Hitunglah nilai tan(A – B)!

   Jawab :

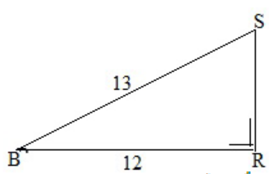


AP $= \sqrt{AQ^2 - PQ^2}$

$= \sqrt{5^2 - 3^2}$

$= \sqrt{25 - 9}$

$= \sqrt{16} = 4 \rightarrow \tan A = \frac{3}{4}$



RS $= \sqrt{BS^2 - BR^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2}$

$= \sqrt{169 - 144}$

$= \sqrt{25} = 5 \rightarrow \tan B = \frac{5}{12}$

Tan (A – B) $= \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4}.\frac{5}{12}}$

$= \dfrac{\frac{9-5}{12}}{1 + \frac{5}{16}}$

$= \frac{4}{12} \text{ x } \frac{16}{21}$

$= \frac{16}{63}$

V.Rumus-Rumus Sudut Rangkap

a. $\sin 2A = 2\sin A.\cos A$

b. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1$

c. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

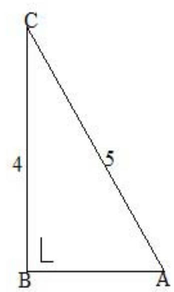
Contoh

1.Diketahui Sin A = $\frac{4}{5}$ dan sudut A lancip

Hitunglah sin 2A,cos 2A,tan 2A

Jawab :

Perhatikan gambar disamping



Sin A = $\frac{4}{5}$ maka BC = 4,dan AC = 5

AB $= \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$

$= \sqrt{9}$ = 3 Sehingga Cos A $= \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

Tan A = $\frac{4}{3}$

Dengan demikian :

Sin 2A = 2 sin A.cos A

$= 2(\frac{4}{5})(\frac{3}{5})$

$= \frac{24}{25}$

Cos 2A $= Cos^2A - Sin^2A$

$= (\frac{3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2$

$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$

$$Tan\ 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$= \frac{2(\frac{4}{3})}{1-(\frac{4}{3})^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{8}{3} \text{ x } -\frac{9}{7} = -\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

VI. Rumus Perkalian Cosinus Dan Sinus

a. $2.\cos A.\cos B \;=\; \cos(A+B)+\cos(A-B)$
b. $2.\sin A.\sin B \;=\; \cos(A+B)-\cos(A-B)$
c. $2.\sin A.\cos B \;=\; \sin(A+B)+\sin(A-B)$
d. $2.\cos A.\sin B \;=\; \sin(A+B)-\sin(A-B)$

Contoh
1.Hitunglah nilai dari (cos 75^0 sin 15^0),tanpa menggunakan tabel matematika atau kalkulator.
Jawab :
2 cos A.sin B = sin(A+B) – sin(A – B)
Cos A.sin B $= \frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$

Sehingga :
Cos 75^0.sin 15^0 $= \frac{1}{2}\{\sin(75^0+15^0)-\sin(75^0-15^0)\}$

$= \frac{1}{2}(\sin 90^0 - \sin 60^0)$
$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

VII. Rumus Jumlah dan Selisih Cosinus dan Sinus

a. $\cos C + \cos D \;=\; 2\cos\frac{(C+D)}{2}.\cos\frac{(C-D)}{2}$
b. $\cos C - \cos D \;=\; -2\cos\frac{(C+D)}{2}.\cos\frac{(C-D)}{2}$
c. $\sin C + \sin D \;=\; 2\sin\frac{(C+D)}{2}.\cos\frac{(C-D)}{2}$
d. $\sin C - \sin D \;=\; 2\cos\frac{(C+D)}{2}.\sin\frac{(C-D)}{2}$

Contoh
1. Nyatakan bentuk perkalian berikut dan sederhanakan jika mungkin
   a. Sin 75^0 + Sin 15^0
      Jawab :
      Sin C + Sin D $= 2\sin\frac{1}{2}(C+D).\cos\frac{1}{2}(C-D)$.*maka*
      Sin 75^0 + Sin 15^0 $= 2\sin\frac{1}{2}(75^0+15^0).\cos\frac{1}{2}(75^0-15^0)$.
      $= 2\sin 45^0.\cos 30^0$
      $= 2(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3})$
      $= \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b.Sin 3x – sin x

Jawab :

Sin C – sin D $= 2\cos \frac{1}{2}(C + D).\sin \frac{1}{2}(C - D)$ *maka*

Sin 3x – sin x $= 2\cos \frac{1}{2}(3x + x).\sin \frac{1}{2}(3x - x)$

$= 2\cos 2x.\sin x$

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut dengan jawaban yang tepat!

1. sin 3A =....
2. sin 4A =....
3. $2\sin 50^0 \cos 40^0 + 2\cos 20^0 \sin 10^0$ =.........
4. Jika $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ dan $\cos\alpha.\cos\beta = \frac{3}{4}$, maka $\cos(\alpha - \beta) = ...$
5. Jika tan α = a , maka cos 2α = ...
6. $\sin 4x.\sin 3x - \cos 4x.\cos 3x = ...$
7. Untuk semua nilai A, bentuk $\sin(A + 30^O) + \cos(A + 60^O)$ sama dengan ....
8. $\sin 3x + \sin 7x = ...$
9. Tan 70^0 + tan 20^0 =.....
10. $4\cos(15 + a)^0 \cos(15 - a)^0$ =....

== oOo ==

Bagaimana Mendapatkan Modul Ini Di Internet Secara GRATIS?

Modul ini bersama modul-modul yang lain, serta semua informasi tentang E-Learning matematika SMA-SMK dapat kalian manfaatkan secara GRATIS .

Semua modul merupakan hasil karya semua anggota MGMP Matematika SMK Kota Pasuruan. Mohon maaf apabila ada kesalahan penulisan. Tahun pelajaran 2010/2011 merupakan tahun pertama kami merintis. Akan kami revisi di tahun pelajaran berikutnya. Kritik dan saran kami terima lewat E-mail : mgmpmtk_smkpasuruan@yahoo.co.id

Bagaimana caranya memanfaatkannya :

A. Weblog : www.matematika-pas.blogspot.com

(i) Buka browser internet (contoh : Mozilla Firefox, Opera, Internet Explorer, Google Crome, dll)

(ii) Pada Addres (alamat) gantilah dengan : www.matematika-pas.blogspot.com lalu tekan Enter

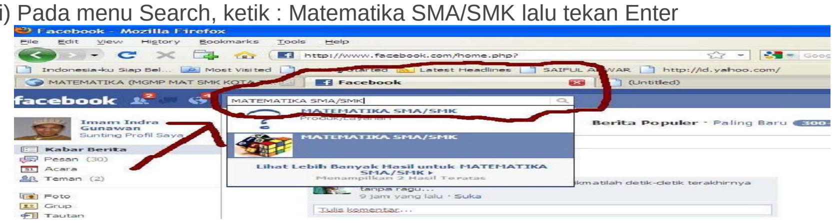
(iii) Untuk mendapatkan Modul Ini secara GRATIS, pilih menu Modul, lalu pilih Modul yang sesuai & klik

(iv)Terhubung (Link) dengan ziddu.com. Ikuti saja perintahnya. Ulangi beberapa kali jika gagal.

B. Facebook

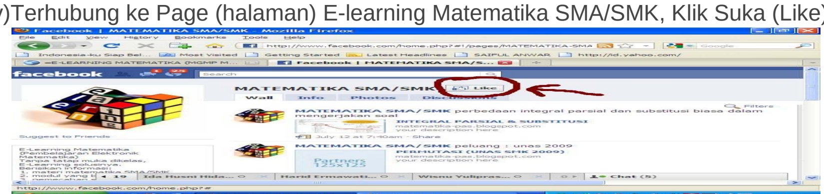
(i) Masuk akun facebook

(ii) Pada menu Search, ketik : Matematika SMA/SMK lalu tekan Enter



(iii) Klik (Pilih) Matematika SMA/SMK dengan gambar kubus ajaib bertuliskan E-Learning

(iv)Terhubung ke Page (halaman) E-learning Matematika SMA/SMK, Klik Suka (Like)



(v) Semua Informasi E-Learning (Pembelajaran Elektronik) matematika tanpa tatap muka dikelas secara otomatis akan masuk di Beranda (Home) akun facebook kalian.

(vi) Segera ajak teman-teman facebook kalian untuk bergabung disini.

Tidak semua Internet itu tidak baik, banyak sisi positif yang dapat diambil dari sana. Hanya keyakinan kita pada ajaran agama masing-masing yang dapat membentenginya. Kami sudah dapat membuktikannya melalui E-LEARNING MATEMATIKA dengan memanfaatkan Weblog dan Facebook.

Semoga Bermanfaat.

MGMP Matematika SMK kota Pasuruan