Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF • Josselin GARNIER
Emmanuel HALBERSTADT • François MOULIN
Monique RAMIS • Jacques SAULOY

MATHÉMATIQUES

TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE 1

3e édition

DUNOD

Jean-Pierre Ramis, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, membre de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, membre de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, professeur émérite à l'Institut de Mathématique de Toulouse (Université Paul Sabatier), a été directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques Avancées de Strasbourg et de l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

André Warusfel, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de Mathématiques.

Xavier Buff, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, ancien directeur de l'Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse.

Josselin Garnier, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'École Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées.

Emmanuel Halberstadt, a été Maître de conférences à l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, ancien chargé de cours d'agrégation aux Écoles Normales Supérieures d'Ulm et de Cachan.

François Moulin, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, professeur de chaires supérieures au Lycée sainte-Geneviève (spéciales MP*).

Monique Ramis, ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Sèvres, a été professeur de chaires supérieures (à Paris, Strasbourg, Toulouse).

Jacques Sauloy, ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud, maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Illustration de couverture : © DNYS9 – istock.com

ISBN 978-2-10-078278-9

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

Préface

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.
Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.
Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc. Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.
L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur, c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le « savoir-faire » qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.
L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (850) qui

incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à « redresser la barre », mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu.
Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Alain Connes,
Médaille Fields 1982,
Professeur au Collège de France.

Table des matières

II Algèbre

III Géométrie

IV Analyse

V Probabilités, statistiques

Avant-propos

Ce livre est le premier d'une série de trois ouvrages de mathématiques pour la licence[1]. Il couvre les programmes de mathématiques des diverses filières scientifiques de première année. Il contient un cours complet, illustré d'exemples et d'applications, et des indications historiques. De plus, il propose au fil du texte de nombreux exercices corrigés qui permettront à l'étudiant de s'entraîner au fur et à mesure de son apprentissage. On trouvera aussi à la fin de chaque « module » des exercices supplémentaires[2] avec des indications de solutions. Une correction détaillée d'une grande partie de ces exercices est accessible sur le site de l'éditeur.

Dans cette nouvelle édition nous avons tenu compte de l'évolution récente des programmes de l'enseignement secondaire (importante pour certains thèmes) et des modifications des enseignements universitaires et, d'autre part, des remarques de nos lecteurs et de nos collègues enseignants.

Nos livres sont conçus comme une aide à l'enseignement oral dispensé par nos collègues dans les cours et travaux dirigés, en particulier par une construction « modulaire ». Les différents sujets apparaissent, pour chaque année d'enseignement, groupés dans un seul volume mais l'ordre de lecture n'est pas imposé, et chaque étudiant peut se concentrer sur tel ou tel aspect en fonction de son programme et de son travail personnel.

Ce livre peut être utilisé par un enseignant comme ouvrage de base pour son cours, dans l'esprit d'une pédagogie encore peu utilisée en France, mais qui a largement fait ses preuves ailleurs. Nous avons aussi pensé à l'étudiant travaillant seul, sans appui d'un corps professoral.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan. Leur maniement, au moins à un certain niveau, devra évidemment être acquis par l'étudiant à la fin de ses années de Licence. Mais celui-ci devra aussi avoir appris à calculer, sans s'appuyer exclusivement sur les ordinateurs et les logiciels, à « se débrouiller » devant un problème abstrait ou issu des applications. Nous avons donc, à cette fin, mis en place une approche adaptée. Nous insistons, dès la première année, sur les exigences de rigueur (définitions précises, démonstrations rigoureuses), mais les choses sont mises en place de façon progressive et pragmatique, et nous proposons des exemples riches, dont

[1]Dans ce livre, les deux autres ouvrages seront notés L2 (*Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2*) et L3 (*Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 3*).

[2]Certains, plus difficiles, sont marqués d'une ou deux étoiles

l'étude met souvent en œuvre des approches multiples. Nous aidons progressivement le lecteur à acquérir le maniement d'un outillage abstrait puissant, sans jamais nous complaire dans l'abstraction pour elle-même et un formalisme sec et gratuit : le cœur des mathématiques n'est sans doute pas un corpus de théories, si profondes et efficaces soient-elles, mais un certain nombre de problèmes dans toute leur complexité, souvent issus d'une réflexion sur le monde qui nous entoure.

Historiquement les mathématiques se sont développées pendant des siècles en relation avec les autres sciences. Après une phase de « repliement sur elles-mêmes », leurs interactions se développent à nouveau vigoureusement (avec la physique, l'informatique, la mécanique, la chimie, la biologie...). Nous souhaitons, au niveau de l'enseignement des premières années d'université, accompagner ce mouvement et, en pratique, la mise en place ici ou là de filières scientifiques pluridisciplinaires avec une composante mathématique pure ou appliquée. Nous avons, par exemple, introduit de solides initiations aux probabilités et statistiques et à l'algorithmique dès ce volume de première année.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage il est inévitable que quelques erreurs subsistent. Nous prions le lecteur, qui pourra les signaler à l'éditeur ou à l'un des auteurs pour correction lors d'un nouveau tirage, de nous en excuser.

Une correction détaillée des 530 énoncés supplémentaires est accessible sur le site `http://www.dunod.com` de l'éditeur à la page de ce livre. Ces corrigés sont au format pdf, ce qui permet facilement de faire une recherche sur un mot ou le numéro d'un exercice ou d'imprimer une solution.

Edmond Ramis à enseigné de longues années en classes préparatoires et écrit une série de livres pour ces classes. Ces livres ont fortement contribué à la formation de plusieurs générations d'étudiants, finissant par acquérir un nom commun : « le Ramis ». Plusieurs de ces étudiants sont maintenant enseignants-chercheurs ou chercheurs dans les universités. Au début des années 2000, André Warusfel a eu l'idée de prolonger l'œuvre d'Edmond Ramis par une série d'ouvrages pour l'enseignement universitaire. André nous a hélas quittés. Nous poursuivons l'édition de ces livres au plus près de l'esprit initial.

Jean-Pierre Ramis

Partie I

Notations et vocabulaire

Vers 1870 Cantor, avec Dedekind puis Peano et quelques autres, créa la théorie des ensembles. Elle fut d'abord mal accueillie et, plus tard, conduisit à une crise aussi violente que féconde. Aujourd'hui cette théorie (au moins à son niveau élémentaire), avec son langage et ses principales notations, est l'outil de base du mathématicien.
Après Cantor apparurent un certain nombre de problèmes : discussions entre Lebesgue, Borel et Baire sur l'axiome du choix, graves paradoxes de la théorie des ensembles découverts par Russell (*l'ensemble de tous les ensembles*). Toujours au début du XX^{e} siècle, Hilbert entreprit de donner des bases solides, totalement indiscutables (dans la ligne historique d'Aristote, Leibniz, Boole, Frege, Peano…). Il avait l'ambition de formaliser complètement *tout* le raisonnement mathématique. Mais malgré le génie de Hilbert, ce programme finit par un échec retentissant avec, en 1931, une stupéfiante découverte de Gödel (le théorème d'incomplétude, relié à des paradoxes classiques : *un crétois dit que tous les crétois sont menteurs*).
Toutefois, si la réponse de Hilbert était fausse, sa *question* était bonne ! En effet, elle conduisit, entre autres, à l'invention des ordinateurs et à un extraordinaire développement de la programmation et du calcul… initiés par des travaux de von Neumann et Turing (eux-mêmes fortement influencés par le résultat de Gödel). L'histoire n'est pas finie et tout cela se prolonge dans d'importantes recherches récentes en informatique théorique (comme par exemple les travaux de G.J. Chaïtin, en relation avec le concept physique de l'entropie).

Ce premier module n'est évidemment pas à lire en premier ! Mais il faut y revenir sans cesse, au moins au départ, pour préciser tel ou tel point, lever telle obscurité apparente, bref l'utiliser comme un dictionnaire de scrabble ou un manuel de grammaire. Certains passages (sur les cardinaux, ou les connecteurs logiques) peuvent paraître complexes à première vue. Cela correspond à de vraies difficultés et ne doit surtout pas décourager le lecteur. Il est conseillé de s'y replonger plusieurs fois, en fonction des besoins, et un jour son contenu sera devenu tout à fait abordable. Bonne lecture discursive !

Fondements I.1

Du paradis que Cantor a créé pour nous,
nul ne nous chassera (Hilbert).

La théorie des ensembles a été créée par Georg Cantor à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle pour résoudre des problèmes d'analyse réelle. Elle a suscité des résistances psychologiques (certains mathématiciens y voyaient de la métaphysique) et posé d'importantes difficultés logiques (la « crise des fondements », au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle). Cependant, elle a rapidement investi les autres parties des mathématiques ; en particulier, l'algèbre moderne, créée en Allemagne entre les deux guerres mondiales, est entièrement formulée dans le langage des ensembles.

Dans leur version moderne, toutes les mathématiques sont fondées sur la théorie des ensembles et *tout objet mathématique est un ensemble*. Ainsi, dans la théorie de Von Neumann, on définit l'entier naturel n comme un ensemble particulier à n éléments ; par exemple, $0 := \varnothing$ (voir la section 6.3).

Nous adopterons un point de vue plus naïf. Nos ensembles et nos applications contiennent (ou mettent en jeu) des éléments, qui sont des objets mathématiques plus ou moins élémentaires et dont on ne précise pas nécessairement la nature. Toutes ces « entités » sont cependant soumises à des *axiomes* que nous rendrons explicites, autant du moins que ce point de vue non formel le permet. Il ne s'agit pas à proprement parler de *fondations* des mathématiques, mais plutôt de la mise en place de l'outillage de base qui interviendra dans *toutes les structures* et *toutes les théories* qui seront exposées dans cet ouvrage. Ainsi, l'exposition n'est pas strictement linéaire : des exemples seront tirés des modules ultérieurs, certaines définitions (lois de composition, nombres entiers, relations d'ordre) apparaîtront à plusieurs reprises si des points de vue différents le justifient. Notons que la section 6 (cardinaux) peut être omise en première lecture

Enfin, nous ne formaliserons pas la logique. Nous admettrons une connaissance intuitive de la notion de vrai et de faux, de l'égalité et même des entiers naturels. Des règles de raisonnement seront décrites *à la fin* de ce module, alors que nous aurons déjà suffisamment de matière pour les illustrer.

Une théorie exposée de manière purement formelle et sans exemples serait bien indigeste ! Et par ailleurs, nous savons bien que dans le secondaire ont été rencontrés de nombreux ensembles, en particulier les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$ (entiers naturels), $\mathbb{N}^*$ (entiers naturels non nuls), $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (nombres réels), $\mathbb{R}_+$ (nombres réels positifs ou nuls), $\mathbb{R}_+^*$ (nombres réels strictement positifs), $\mathbb{C}$ (nombres complexes), etc. Tous ces ensembles seront redéfinis formellement[1] dans les modules correspondants de ce cours. Cependant, le lecteur est invité à profiter de la connaissance intuitive qu'il en a déjà pour illustrer les définitions et constructions qui vont suivre.

1 Ensembles

Le lecteur qui ne désire pas s'initier à l'axiomatique des ensembles peut aborder la lecture de ce module à la page 7 ; s'il est familier avec les définitions de base, il peut même commencer par le théorème 1 de la page 14.

1.1 Appartenance, éléments

Les ensembles sont formés d'éléments. Ce que sont ces derniers n'est pas précisé. On introduit donc une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance*. Cette relation s'écrit $x \in E$, ce qui se lit « x appartient à E », « x est élément de E », « E contient x ». Notons cependant que cette dernière formulation est ambiguë, à cause de l'inclusion (définition 2 de la page 7). La négation de la relation d'appartenance s'écrit : $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux, ou encore que $\neg(x \in E)$ est vrai (en logique, le symbole $\neg$ signifie « non »). On lit : « x n'appartient pas à E », etc.

Les ensembles les plus célèbres sont $\mathbb{N}$ (dont les éléments sont appelés *entiers naturels*), $\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont appelés *entiers relatifs*), $\mathbb{Q}$ (dont les éléments sont appelés *nombres rationnels*), $\mathbb{R}$ (dont les éléments sont appelés *nombres réels*) et $\mathbb{C}$ (dont les éléments sont appelés *nombres complexes*).

Axiome 1. L'axiome fondamental est l'*axiome d'extensionalité* pour les ensembles, qui dit qu'un ensemble est totalement caractérisé par ses éléments :

$$\big(\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \in F\big) \quad \Longrightarrow \quad E = F. \tag{1}$$

Lire : « deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux ».

Dans la phrase entre guillemets, l'usage de l'article défini « les » (mêmes éléments) dit qu'il s'agit de *tous* les éléments : c'est pourquoi la formule (1) comporte un quantificateur $\forall x$, qu'il faut lire « quel que soit x », ou encore « pour tout x ».

Remarquons que l'implication réciproque va de soi, pour des raisons de logique pure. L'usage mathématique veut en effet que, si l'on a une égalité $E = F$, alors toute propriété vérifiée par E est

[1] À noter que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sera même construit deux fois : une première fois dans ce module (*entiers de Von Neumann*, voir la section 6.3) et une deuxième fois dans le module suivant. C'est cette dernière construction qui doit ici être regardée comme « officielle ».

vérifiée par F (« substitutivité de l'égalité »). C'est même ainsi que Leibniz définissait l'égalité ! Pour en revenir à nos ensembles, si l'on a $E = F$ et $x \in E$, on en déduit que $x \in F$. Pratiquement, on pourra prouver l'égalité de deux ensembles *par équivalence*.

Exercice 1.
Déterminer l'intersection des droites $D : y = 2x + 1$ et $D' : y = 3x - 2$.
Solution. C'est l'ensemble des points (x, y) qui appartiennent à D et à D', c'est-à-dire qui satisfont le système d'équations $(y = 2x + 1\ ,\ y = 3x - 2)$. Les méthodes de résolution du secondaire (par équivalence, justement) permettent de déduire que (x, y) est solution de ce système si, et seulement si, $x = 3$, $y = 7$. Comme nous allons le voir, il y a un ensemble dont le seul élément est le point $P = (3, 7)$, c'est le singleton $\{P\}$. On a donc : $M \in D \cap D' \Leftrightarrow M \in \{P\}$, d'où $D \cap D' = \{P\}$.

La plupart des *axiomes* qui vont apparaître dans ce module mettront en jeu une certaine propriété $P(x)$ d'un élément indéterminé x (P s'appelle un *prédicat*[2]) ; un axiome dira alors que les éléments x tels que $P(x)$ est vrai forment un ensemble, autrement dit, qu'il existe un ensemble E tel que $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow P(x)$. Cela se lit : « quel que soit x, $x \in E$ si, et seulement si, $P(x)$ ». L'axiome d'extensionalité permettra alors de déduire que E est *unique*. En effet, si F est un (autre) ensemble tel que $\forall x\ ,\ x \in F \Leftrightarrow P(x)$, les règles usuelles concernant l'équivalence logique entraînent : $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \in F$, donc $E = F$. Après quelques exemples simples, ce procédé sera systématisé en 1.2.

1.1.1 Construction d'ensembles finis

Nous allons commencer par les ensembles « finis » dans un sens intuitif, terme qui sera précisé à la section 6.

Axiome et définition 2. Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément.

$$\exists E\ :\ \forall x\ ,\ x \notin E. \tag{2}$$

On le note $\varnothing$ et on l'appelle *ensemble vide*.

L'existence d'*un* (sous-entendu : « au moins ») ensemble qui n'a aucun élément (« un », article indéfini, exprime l'existence, quantificateur $\exists$) est le contenu de cet axiome. Mais, d'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble qui n'a aucun élément est unique. C'est pourquoi, dans la deuxième partie de la phrase, on dit *le* (note), qui sous-entend l'unicité. La formule (2) peut donc être renforcée ainsi :

$$\exists ! E\ :\ \forall x\ ,\ x \notin E.$$

Le symbole $\exists !$ signifie « il existe un unique ».

Axiome et définition 3. Soit a un objet mathématique. L'*axiome du singleton* dit qu'il existe un ensemble dont le seul élément est a. On le note $\{a\}$, lire « singleton a ».

Notant $E = \{a\}$, on a donc : $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x = a$. D'après l'axiome d'extensionalité, un tel ensemble est unique. Tout objet mathématique est donc élément d'un ensemble, et nous appellerons donc *élément* un tel objet. Naturellement, $\{a\} = \{b\}$ équivaut logiquement à $a = b$.

Axiome et définition 4. Soient a, b deux éléments (non nécessairement distincts). L'*axiome de la paire* dit qu'il existe un ensemble dont les seuls éléments sont a et b. On le note $\{a, b\}$. Si $a \neq b$, on l'appelle « paire formée de a et b ».

[2] La notion de prédicat et son usage seront abordés de manière plus détaillée à la section 7.2

D'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble $\{a, b\}$ est unique. L'axiome de la paire implique d'ailleurs celui du singleton : lorsque $a = b$, on trouve $\{a, a\} = \{a\}$. On démontre de même que $\{a, b\} = \{b, a\}$ par de la logique pure ! Pour tout x :

$$x \in \{a, b\} \iff (x = a \text{ ou } x = b) \iff (x = b \text{ ou } x = a) \iff x \in \{b, a\},$$

et l'on applique l'axiome d'extensionalité. On prendra donc garde à ne pas confondre la paire $\{a, b\}$ et le couple (a, b) (ces derniers apparaîtront à la page 10) : on n'a $(a, b) = (b, a)$ que si $a = b$.

Exercice 2.
Montrer que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont deux à deux distincts.
Solution. Seul le premier n'a aucun élément, il est donc différent de chacun des trois autres ; par ailleurs, puisque $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ (on vient de le voir), les singletons correspondants sont différents. Le dernier ensemble est une paire parce que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, il n'est donc égal à aucun des trois premiers.

1.1.2 Définition en extension

Chaque fois que l'on se donne des objets $a_1, \ldots, a_n$, on dispose d'une version plus générale des axiomes précédents.

Axiome et définition 5. Il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $a_1, \ldots, a_n$ (d'après l'axiome d'extensionalité, il est unique). Cet ensemble est noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$. On dit que l'on a défini cet ensemble « en extension », c'est-à-dire en énumérant ses éléments.

Exercice 3.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{a\}$, puis $\{a_1, \ldots, a_n\} = \varnothing$.
Solution. La première égalité a lieu si, et seulement si, les objets $a_1, \ldots, a_n$ sont tous égaux à a. La seconde est en principe impossible. Il existe cependant une convention (en fait, un abus de langage) selon laquelle, lorsque $n = 0$ (aucun objet !), la notation $\{a_1, \ldots, a_n\}$ désigne l'ensemble vide.

Pour $n = 1, 2$, on retrouve les axiomes précédents. Au delà, on trouve les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, etc. La notation générale $a_1, \ldots, a_n$ est légèrement abusive car elle sous-entend que l'on sait interpréter les $\ldots$ intermédiaires. Dans la pratique, on s'autorise des « définitions en extension incomplètes » comme $\{0, 2, \ldots, 2n\}$ parce que l'on devine aisément la *loi de formation* des éléments énumérés : ici, les entiers de la forme $2k$, où l'entier k varie de 0 à n. Par abus courant, la même notation s'emploie pour énumérer des ensembles infinis, comme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou l'ensemble $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ des entiers naturels pairs. Cela peut être dangereux (ambiguïté sur la loi de formation) et cela cache en réalité des axiomes plus puissants. En fait, pour anticiper, on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble $\{u_0, u_1, \ldots\}$ est l'ensemble image de cette suite, c'est-à-dire l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4.
Reconnaître l'ensemble $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.
Solution. Il s'agit bien sûr de l'ensemble $\mathbb{Z}$. On peut le décrire à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les formules $u_{2p} = -p$ et $u_{2p+1} = p + 1$.

1.2 Définition en compréhension

Dans des situations très répandues, on a un prédicat $P(x)$ (*i.e.* une propriété dépendant de l'élément indéterminé x) et l'on se demande s'il existe un ensemble E tel que $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow P(x)$. Si c'est le cas, E est unique (axiome d'extensionalité).

Définition 1. Si un tel ensemble existe, on le note $\{x \mid P(x)\}$, ce qui se lit « l'ensemble des x tels que $P(x)$ ». On dit alors que la propriété P est *collectivisante*.

Exemples. Comme on l'a vu, les propriétés $x \neq x$, $x = a$, $(x = a$ ou $x = b)$ (a et b étant fixés) sont collectivisantes. Pour un ensemble E donné, la propriété $x \in E$ est évidemment collectivisante, et l'on a l'égalité $E = \{x \mid x \in E\}$.
Toutes ces précautions sont nécessaires parce que l'on ne peut pas déclarer tous les prédicats collectivisants :

Exercice 5.
L'un des plus vieux paradoxes de la théorie des ensembles concerne « l'ensemble des éléments qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes », c'est-à-dire l'ensemble $E := \{x \mid x \notin x\}$. Ainsi, $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \notin x$. Appliquer cette assertion à $x := E$.
Solution. On tombe sur la célèbre contradiction :

$$E \in E \Longleftrightarrow E \notin E.$$

L'existence d'un tel ensemble E entraînerait une contradiction. Selon les principes de la logique mathématique, cette existence est donc fausse, l'ensemble E n'existe pas et la propriété $P(x) := (x \notin x)$ n'est donc pas collectivisante.

Il nous faudra donc expressément déclarer par des axiomes que certains prédicats sont collectivisants et que certains ensembles existent bel et bien, comme on l'a fait pour les définitions en extension. Cependant, dans l'immense majorité des cas, cela sera facilité par l'axiome suivant, appelé *axiome de séparation* :

Axiome et définition 6. Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété des éléments de E. Alors la propriété « $P(x)$ et $x \in E$ » est collectivisante et l'on note l'ensemble associé $\{x \in E \mid P(x)\}$, ce qui se lit « l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ ».

Il n'existe donc pas d'ensemble de tous les ensembles : en effet, si un tel ensemble existait, selon l'axiome de séparation, toute propriété serait collectivisante.

Exercice 6.
Les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ et $\{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 0\}$ existent-ils ?
Solution. Oui, d'après l'axiome de séparation ! Mais ils sont évidemment vides (donc égaux). Ce sont leurs éléments qui n'existent pas…

1.2.1 Inclusion, parties

Définition 2. On dit que l'ensemble F est *inclus* dans l'ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E :

$$F \subset E \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\forall x\ ,\ x \in F \Rightarrow x \in E\big).$$

On dit aussi que F est une *partie* ou un *sous-ensemble* de E.

On dit également que E contient F (mais c'est ambigu à cause de la relation $x \in E$ qui se dit aussi « E contient x »). L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble. Tout ensemble est sous-ensemble de lui même. L'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété P) est un sous-ensemble de E.

Exercice 7.
À quelle condition a-t-on $\{a\} \subset E$? $\{a, b\} \subset E$? $\{a\} \subset \{b\}$?
Solution. L'inclusion $\{a\} \subset E$ (resp. $\{a, b\} \subset E$) est équivalente à l'appartenance $a \in E$ (resp. aux appartenances $a \in E$ et $b \in E$).
L'inclusion $\{a\} \subset \{b\}$ est équivalente à l'égalité $a = b$.

En anticipant un peu sur les définitions ultérieures, on voit que la relation d'inclusion est réflexive : $E \subset E$, transitive : $(E \subset F$ et $F \subset G) \Rightarrow E \subset G$ et antisymétrique : $(E \subset F$ et $F \subset E) \Rightarrow E = F$; les deux premières propriétés sont immédiates, la troisième est une simple traduction de l'axiome d'extensionalité. L'inclusion est donc une relation d'ordre (définition 16 de la page 29).

Axiome et définition 7. Soit E un ensemble. La relation $x \subset E$ est collectivisante et définit *l'ensemble des parties de* E, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc : $\mathcal{P}(E) := \{x \mid x \subset E\}$.

Exemples. Le seul sous-ensemble de $\varnothing$ est $\varnothing$, d'où l'égalité $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
On vérifie de même que $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$ et que $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Enfin, $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\varnothing)\big) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

1.3 Constructeurs

1.3.1 Constructeurs élémentaires

Pour construire la réunion de deux ensembles quelconques, un nouvel axiome est requis.

Axiome et définition 8. Soient E et F deux ensembles. Il existe alors un ensemble G tel que :

$$\forall x\ ,\ x \in G \Longleftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F).$$

Cet ensemble (unique d'après l'axiome d'extensionalité) est appelé *réunion* ou *union* de E et de F et noté $E \cup F$. Ainsi, $E \cup F := \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$.

Rappelons que le « ou » des mathématiciens n'est pas exclusif : l'affirmation $x \in E$ *ou* $x \in F$, n'exclut nullement que l'on ait $x \in E$ *et* $x \in F$. Ainsi, $E \cup F$ contient en particulier les éléments communs à E et à F.

Définition 3. Soient E et F deux ensembles. L'ensemble des éléments de E qui sont dans F existe (axiome de séparation) et est unique (axiome d'extensionalité). On l'appelle *intersection* de E et de F et on le note $E \cap F$:

$$\forall x\ ,\ x \in E \cap F \Longleftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F).$$

Ainsi, $E \cap F := \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}$.
On dit que E et F sont *disjoints* si leur intersection est vide.

On a bien sûr $E \cap F = F \cap E$.

Définition 4. Soient E et F deux ensembles. L'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F existe (axiome de séparation) et est unique (axiome d'extensionalité). On l'appelle *différence* de E et de F et on le note $E \setminus F$:

$$\forall x \ , \ x \in E \setminus F \Longleftrightarrow (x \in E \ et \ x \notin F).$$

Ainsi, $E \setminus F := \{x \mid x \in E \ et \ x \notin F\}$.

Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé *complémentaire de* F *dans* E et noté $\complement_E F$. Remarquons d'ailleurs que l'on ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F « dans l'absolu », mais seulement relativement à un ensemble englobant E.

Les opérations de réunion et d'intersection vérifient de nombreuses règles de nature algébrique, qui sont toutes très faciles à vérifier une fois écrites :

Dans ces égalités, E, F et G désignent trois ensembles quelconques.

$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$	(associativité de la réunion)
$E \cup F = F \cup E$	(commutativité de la réunion)
$\varnothing \cup E = E \cup \varnothing = E$	(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)
$E \cup E = E$	(tout ensemble est idempotent pour la réunion)
$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$	(associativité de l'intersection)
$E \cap F = F \cap E$	(commutativité de l'intersection)
$\varnothing \cap E = E \cap \varnothing = \varnothing$	(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)
$E \cap E = E$	(tout ensemble est idempotent pour l'intersection)
$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$	(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)
$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)
$E \subset F \Longleftrightarrow E \cap F = E$	
$E \subset F \Longleftrightarrow E \cup F = F.$	

À titre d'exemple, démontrons les deux dernières règles, en commençant par les implications directes (ce qui signifie, de gauche à droite). Supposons donc l'inclusion $E \subset F$. En ce qui concerne la première égalité à démontrer, on a *a priori* l'inclusion $(E \cap F) \subset E$. Par ailleurs, on a à la fois $E \subset E$ (toujours vrai) et $E \subset F$ (c'est l'hypothèse), donc $E \subset (E \cap F)$ (par définition de l'intersection). De la double inclusion $(E \cap F) \subset E$ et $E \subset (E \cap F)$, on déduit enfin la première égalité désirée : $(E \cap F) = E$. L'autre égalité se démontre également par double inclusion : l'inclusion $F \subset (E \cup F)$ est toujours vraie, l'inclusion réciproque $(E \cup F) \subset F$ vient (par définition de la réunion) de ce que $E \subset F$ (c'est l'hypothèse) et $F \subset F$ (toujours vrai).

Démontrons maintenant les implications réciproques (ce qui signifie, de droite à gauche). Supposons d'abord $(E \cap F) = E$. Alors tout élément de E est élément de $E \cap F$ (ces ensembles ont mêmes éléments puisqu'ils sont égaux) donc de F : autrement dit, $E \subset F$, comme espéré.
Supposons maintenant que $(E \cup F) = F$. Alors tout élément de E est élément de $E \cup F$ (évidemment) donc de F (qui est égal au précédent), et l'on a encore $E \subset F$.

Exercice 8.
À quelle condition a-t-on $E \cup F = E \cap F$?
Solution. Puisque $(E \cap F) \subset E \subset (E \cup F)$ et $(E \cap F) \subset F \subset (E \cup F)$, l'égalité ci-dessus entraîne $E = F$; la réciproque est immédiate.

L'union, l'intersection et la différence de deux parties d'un ensemble E sont encore des parties de E. Anticipant un peu sur la section 4, on peut donc les considérer comme des lois de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$. Outre les règles algébriques énoncées plus haut, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni des lois $\cup$ et $\cap$ vérifie les propriétés suivantes :

F et G désignent des parties de l'ensemble E.

$E \cap F = F \cap E = F$	(l'ensemble E est neutre pour l'intersection)
$E \cup F = F \cup E = E$	(l'ensemble E est absorbant pour la réunion)
$\complement_E(\complement_E F) = F$	(involutivité du passage au complémentaire)
$\complement_E(F \cup G) = (\complement_E F) \cap (\complement_E G)$	(le passage au complémentaire est un morphisme $\cup \to \cap$)
$\complement_E(F \cap G) = (\complement_E F) \cup (\complement_E G)$	(le passage au complémentaire est un morphisme $\cap \to \cup$)

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan*. Les deux premières lois sont immédiates d'après les règles précédentes. La troisième loi découle de l'équivalence : $\forall x \in E\ ,\ x \notin F \Leftrightarrow x \in \complement_E F$. La démonstration des lois de Morgan repose sur des règles logiques : soient P et Q deux assertions ; alors la négation de « P et Q » est « non P ou non Q », et la négation de « P ou Q » est « non P et non Q ». On applique ici ces règles à l'assertion $P := (x \in F)$ et à l'assertion $Q := (x \in G)$.

1.3.2 Produits cartésiens

On suppose que l'on sait former à partir de deux objets a et b un *couple* (a, b) de manière à satisfaire la règle suivante :

$$\forall a\ ,\ \forall b\ ,\ \forall c\ ,\ \forall d\ ,\ (a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \ \text{ et } \ b = d.$$

L'exercice I.1.1 de la page 56 suggère une *construction* d'un tel objet, due au mathématicien polonais Kuratowski. Les éléments a et b sont respectivement appelés *première* et *seconde composante* (ou encore *coordonnée*) du couple (a, b). Si $x = (a, b)$, on écrit parfois $a = p_1(x)$ et $b = p_2(x)$.

Axiome et définition 9. Soient E et F deux ensembles. Il existe un ensemble G dont les éléments sont les couples (a,b) formés d'un élément $a \in E$ et d'un élément $b \in F$:

$$G := \{x \mid \exists a \in E \text{ et } \exists b \in F \ : \ x = (a,b)\}.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, un tel ensemble est unique. On le note $E \times F$ et on l'appelle *produit cartésien* des ensembles E et F. De manière équivalente :

$$E \times F := \{(a,b) \mid a \in E \text{ et } b \in F\}.$$

Plus généralement, à partir de n éléments $a_1, \ldots, a_n$, on peut former le n*-uplet* (ou encore n*-uple*) $x = (a_1, \ldots, a_n)$, dont les n composantes (ou coordonnées) sont $a_1 = p_1(x)$,..., $a_n = p_n(x)$. Pour $n = 3, 4, 5, \ldots$, on parle de *triplets, quadruplets, quintuplets,* etc. On a la règle :

$$\forall a_1 \ , \ \ldots \ , \ \forall a_n \ , \ \forall b_1 \ , \ \ldots \ , \ \forall b_n \ ,$$
$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \text{ et } \ldots \text{ et } a_n = b_n.$$

L'axiome ci-dessus se généralise ainsi : les n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in E_1, \ldots, a_n \in E_n$ forment un ensemble, le *produit cartésien* $E_1 \times \cdots \times E_n$. Si l'un des E_i est vide, on ne peut former aucun n-uplet car il n'y a aucune possibilité pour sa $i^{ème}$ composante. Si tous les E_i sont non vides, en choisissant un élément a_i dans chacun des E_i, on forme un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ qui est élément de $E_1 \times \cdots \times E_n$. On en conclut que le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est vide si, et seulement si, l'un des ensembles E_i est vide.

L'application stricte des règles entraîne que $\big(x, (y,z)\big) \neq \big((x,y), z\big)$ (ces deux couples n'ont pas pas la même première projection). Cependant, on les identifie fréquemment à (x,y,z). De même, on identifiera les ensembles produits $E \times (F \times G)$ et $(E \times F) \times G$ à $E \times F \times G$. Cette convention se généralise naturellement à des produits plus compliqués. On pose souvent $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs). Avec les identifications précédentes, cela revient à poser $E^1 = E$, puis, par récurrence, $E^{n+1} = E \times E^n$ (ou $E^n \times E$, au choix). La *diagonale* de E^n est l'ensemble $\{x \in E^n \mid p_1(x) = \cdots = p_n(x)\}$. On peut également le décrire comme $\{(x, \ldots, x) \mid x \in E\}$, où le uplet $(x, \ldots, x)$ a n composantes.

2 Applications

Nous abordons ici l'étude des applications, qui ne sont autres que les fonctions, mais avec un nom savant et une théorie plus précise. Cependant, comme pour les ensembles, nous ne partirons pas d'une définition formelle.

2.1 Applications et graphes

Une *application* d'un ensemble E dans un ensemble F est (naïvement) un « procédé » (non précisé) qui associe à chaque élément $x \in E$ un élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée $f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$

L'élément $f(x) \in F$ est appelé *image* de l'élément $x \in E$ par l'application f.

L'ensemble E est appelé *ensemble de départ* (ou encore *source*) de l'application f ; l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée* (ou encore *but*) de f. Il y a un *axiome d'extensionalité* pour les applications :

Axiome 10. Deux applications f et g de E dans F sont égales si, et seulement si, elles attribuent la même image à tout élément de E :

$$f = g \iff \forall x \in E \ , \ f(x) = g(x).$$

En principe, lorsque l'on connaît l'application f, sa source et son but sont donc déterminés. Dans la pratique, on a tendance à identifier deux applications f et g de même source E dès qu'elles vérifient la relation $\forall x \in E \ : \ f(x) = g(x)$: par exemple, les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Cela peut poser problème, par exemple lorsque l'on discute de la surjectivité (*cf.* la définition 7 de la page 14) : l'application g est surjective, alors que l'application f ne l'est pas. On fait appel au bon sens du lecteur pour vérifier que ce qu'il écrit a bien un sens.

***Exemples*.**

1. Pour tout ensemble E, l'application $x \mapsto x$ de E dans lui-même est appelée *application identité* de E et notée Id_E.
2. Les ensembles E et F étant quelconques (ce dernier non vide), on peut définir, pour tout $a \in F$, l'application $x \mapsto a$ de E dans F : c'est une *application constante*.
3. Si $E \subset F$, l'application $x \mapsto x$ de E dans F est appelée *application canonique* ou *injection canonique* de E dans F.
4. Si f est une application de E dans F et si $E' \subset E$, on peut définir l'application $x \mapsto f(x)$ de E' dans F. Elle est appelée *restriction* de f à E' et notée $f_{|E'}$.
5. Si $F' \subset F$ est tel que $\forall x \in E \ , \ f(x) \in F'$, l'application $x \mapsto f(x)$ de E dans F' est appelée *corestriction* de f à F'.
6. Si $E = \varnothing$, on convient qu'il y a une et une seule application de E dans F, appelée *application vide*. Par l'abus mentionné plus haut, c'est la même quel que soit F.
7. Si $F = \varnothing$ et $E \neq \varnothing$, il n'y a aucune application de E dans F.
8. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, l'application $p_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (sa $i^{\text{ème}}$ composante) de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans E_i est appelée $i^{\text{ème}}$ *projection* ou $i^{\text{ème}}$ *application coordonnée*.
9. Soient E, F_1, F_2 des ensembles et $f_1 : E \to F_1$ et $f_2 : E \to F_2$ des applications. On en déduit une application $x \mapsto \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ de E dans $F_1 \times F_2$. Cette application peut être notée (f_1, f_2), avec toutefois un risque de confusion avec le couple formé de f_1 et f_2.

   Plus généralement, on peut définir $(f_1, \ldots, f_n) : E \to F_1 \times \cdots \times F_n$.
10. Soient E_1, E_2, F_1, F_2 des ensembles et $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ des applications. On en déduit une application $(x_1, x_2) \mapsto \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)$ de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \times F_2$. Cette application est notée $f_1 \times f_2$.

    Plus généralement, on peut définir $f_1 \times \cdots \times f_n : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_n$.

Définition 5. On appelle *graphe* de l'application $f : E \to F$ l'ensemble :

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

On peut également le décrire comme $\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in E\}$. En vertu de l'axiome d'extensionalité, deux applications de même source et de même but sont égales si, et seulement si, elles ont le même graphe. Certains ouvrages définissent d'ailleurs une application comme un triplet (E, Γ, F), où $\Gamma \subset (E \times F)$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in E \ , \ \exists ! y \in F \ : \ (x,y) \in \Gamma,$$

autrement dit, tout $x \in E$ a une unique image $y \in F$.

Exemples.

1. Le graphe de Id_E est la diagonale de E^2.
2. Le graphe de l'application constante $x \mapsto a$ est $E \times \{a\}$.
3. Le graphe de la restriction $f' = f_{|E'}$ est $\Gamma_{f'} = \Gamma_f \cap (E' \times F)$.
4. Le graphe de l'application vide est l'ensemble vide.

2.2 Images et antécédents

Définition 6. Soit $f : E \to F$ une application. On appelle *antécédent* d'un élément $y \in F$ par l'application f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. L'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par f est une partie de F appelée *ensemble image* ou *image* de f et notée $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{Im}\, f := \{y \in F \mid \exists x \in E \ : \ y = f(x)\}.$$

On écrit également $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in E\}$. Il ne faut en principe pas confondre ensemble image et ensemble d'arrivée, tout particulièrement lorsque la question de la surjectivité est en jeu. Pour tout sous-ensemble A de E, l'image $\mathrm{Im}\, f_{|A}$ (pour cette notation, voir l'exemple 4 de la page précédente) de la restriction de f à A est l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent dans A. Ce sous-ensemble de F est appelé *image de A par f* et noté $f(A)$:

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A \ : \ y = f(x)\}.$$

On écrit également $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Ces deux définitions sont liées : on vérifie sans peine que $\mathrm{Im}\, f = f(E)$ et que $f(A) = \mathrm{Im}\, f_{|A}$.

Exemples.

1. L'application Id_E a pour ensemble image E. Une application constante $x \mapsto a$ a pour ensemble image $\{a\}$. L'image de l'application vide est vide. L'image de l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}_+$.
2. Selon le module IV.2, l'image par une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires) ; si I est un segment, c'est-à-dire un intervalle fermé borné, $f(I)$ est lui-même un segment (théorème des bornes).

Un cas particulier intéressant est celui où $E = F$; si $f : E \to E$, on dit que $A \subset E$ est *stable par* f si $f(A) \subset A$. Dans ce cas, par restriction et corestriction on obtient une *application induite sur* A. Par exemple, $\{x\}$ est stable si, et seulement si, $f(x) = x$: on dit alors que x est un *point fixe de* f.
Voici quelques règles de calcul concernant l'image d'une partie de E par une application $f : E \to F$. Ici, A et B désignent des parties de E :

$$\begin{aligned}
f(\varnothing) &= \varnothing, \\
f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\
f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\
f(B) \setminus f(A) &\subset f(B \setminus A), \\
A \subset B &\Longrightarrow f(A) \subset f(B).
\end{aligned}$$

À titre d'exemple, discutons la troisième règle. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$, donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Tentons le raisonnement réciproque. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y = f(a)$ pour un $a \in A$ et $y = f(b)$ pour un $b \in B$. Si f est injective (*cf.* définition 8 de la page ci-contre), on a nécessairement $a = b \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$, ce qui nous apporte une règle supplémentaire :

$$f \text{ injective } \Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Si l'on ne suppose pas f injective, cette égalité peut être fausse : prendre :

$$E = F = \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto x^2, \qquad A = \mathbb{R}_-^* \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R}_+^*.$$

Alors $A \cap B = \varnothing$, donc $f(A \cap B) = \varnothing$, mais $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^*$, donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+^*$.

Définition 7. L'application $f : E \to F$ est dite *surjective* si tout élément de F admet (au moins) un antécédent, autrement dit, si $\operatorname{Im} f = F$:

$$f \text{ surjective } \Longleftrightarrow \big(\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E\ :\ y = f(x)\big).$$

On parle alors d'application de E *sur* F, ou encore de *surjection*.

Exemples. L'application Id_E est surjective. Une application constante n'est surjective que si son ensemble d'arrivée est un singleton. Soit $f : E \to F$ une application quelconque et soit $F' := \operatorname{Im} f$. Alors la corestriction $f : E \to F'$ est surjective. Par exemple, l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective, alors que sa corestriction à $\mathbb{R}_+$ est surjective.

Théorème 1 (de Cantor).
Il n'existe aucune application surjective d'un ensemble E sur $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. Considérons l'ensemble $F := \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. Puisque, pour $x \in E$, $f(x) \subset E$, la condition $x \notin f(x)$ a un sens. L'axiome de séparation garantit l'existence de $F \subset E$. Nous allons montrer que l'élément F de $\mathcal{P}(E)$ n'est l'image par f d'aucun élément a de E, ce qui impliquera que f n'est pas surjective. Si l'on avait $f(a) = F$ pour un certain $a \in E$, de l'équivalence $\forall x \in E \ , \ x \in F \Leftrightarrow x \notin f(x)$ (qui est la définition de F) on déduirait, en remplaçant x par a, l'équivalence : $a \in F \Leftrightarrow a \notin f(a)$, c'est-à-dire $a \in F \Leftrightarrow a \notin F$, ce qui est absurde. On ne peut donc avoir $f(a) = F$. ■

Définition 8. On dit que l'application $f : E \to F$ est *injective* (ou que c'est une *injection*) si tout élément de F admet *au plus* un antécédent :
$$f \text{ injective } \iff \big(\forall x, x' \in E \ , \ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\big).$$
On dit que $f : E \to F$ est *bijective* (ou que c'est une *bijection*) si elle est à la fois surjective et injective, autrement dit si tout élément de F admet *exactement* un antécédent :
$$f \text{ bijective } \iff \big(\forall y \in F \ , \ \exists\, !x \in E \ : \ y = f(x)\big).$$

Rappelons que la notation $\exists\, !x$ signifie « il existe un unique x tel que … »

Exemples.

1. L'application Id_E est toujours bijective.
2. Soit $f : E \to F$ une application injective et soit $F' = \mathrm{Im}\, f$.
   Alors la corestriction $f : E \to F'$ est bijective.
3. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante (ou strictement décroissante), elle est injective.

Exercice 9.
Soient $E = \{a\}$ et $F = \{b, c\}$. Existe-t-il des surjections (resp. des injections, des bijections) de E dans F ?
Solution. Si $b \neq c$, il y a deux applications de E dans F (respectivement définies par $a \mapsto b$ et $a \mapsto c$), et elles sont toutes les deux injectives et non surjectives. Si $b = c$, il n'y a qu'une application (définie par $a \mapsto b$) et elle est bijective.

Définition 9. Supposons l'application $f : E \to F$ bijective. En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée *application réciproque de l'application* f (ou simplement *réciproque de* f) et notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation :
$$\forall x \in E \ , \ \forall y \in F \ , \ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidemment que f^{-1} est également bijective et que sa réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

Exercice 10.
La fonction $x \mapsto \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (« sinus hyperbolique ») est strictement

croissante (sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$). Elle est donc injective. Comme ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$, l'intervalle $\operatorname{Im} f$ est $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective.

Pour calculer $x = f^{-1}(y)$, on résout l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ en prenant pour inconnue auxiliaire $X = e^x$. Celle-ci doit avoir pour valeur l'unique racine strictement positive de l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$, donc $X = y + \sqrt{y^2+1}$; l'application réciproque est donc $y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Définition 10. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
L'application $x \mapsto g\big(f(x)\big)$ de E dans G est appelée *composée* de f et g et notée $g \circ f$.

Si de plus $h : G \to H$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$: c'est l'application $x \mapsto h\big(g(f(x))\big)$ de E dans H. On prendra garde que, dans la composition $g \circ f$, c'est f qui « agit » en premier, bien que cela se lise « g rond f ». Il peut être utile de visualiser l'action à l'aide d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \xmapsto{f} & f(x) & \xmapsto{g} & g\big(f(x)\big). \end{array}$$

Exemples.

1. Pour toute application $f : E \to F$, on a $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.
2. Si f est bijective, on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
3. Si f ou g est constante, alors $g \circ f$ est constante.
4. On ne peut composer $f \circ f$ que si $E = F$.
5. On ne peut composer $f \circ g$ et $g \circ f$ que si la source de l'un est le but de l'autre et réciproquement. On ne peut se poser la question de l'égalité $f \circ g = g \circ f$ que si, en outre, ces deux ensembles sont égaux.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $g : x \mapsto x + 2\pi$. Alors $f \circ g = g \circ f$ si, et seulement si, l'application $x \mapsto f(x) - x$ est 2π-périodique.

Comme le montre le dernier exemple, on n'a pas, en général $f \circ g = g \circ f$, même si les deux applications ont pour source et but un même ensemble E.

La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) est une application injective (resp. surjective, resp. bijective). Dans le cas où f et g sont bijectives, on a :

$$\big(g \circ f\big)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Pour le montrer, on résout $(g \circ f)(x) = z$.
Cela équivaut à $g\big(f(x)\big) = z$, donc à $f(x) = g^{-1}(z)$, donc à $x = f^{-1}\big(g^{-1}(z)\big)$.

En fait, il y a de nombreuses règles de ce genre. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f est bijective, alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si, et seulement si, g l'est.

2. Si g est bijective, alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si, et seulement si, f l'est.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Nous démontrerons seulement les deux dernières, et nous recommandons chaudement au lecteur de prouver les autres à titre d'exercice. Supposons $g \circ f$ injective. Alors on a les implications :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x',$$

d'où l'injectivité de f. Supposons maintenant $g \circ f$ surjective, et soit $z \in G$. Soit $x \in E$ un antécédent de z par $g \circ f$. Alors $f(x) \in F$ est un antécédent de z par g, qui est donc bien surjective.

Définition 11. On définit l'*image réciproque* $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par l'application $f : E \to F$ comme l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$\forall B \subset F\ ,\ f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Il arrive parfois que l'on note $f^{-1}(y)$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des antécédents d'un élément $y \in F$ par f. Avec cette notation, on voit que f surjective (resp. injective, resp. bijective) si, et seulement si, chaque $f^{-1}(y)$ est non vide (resp. vide ou un singleton, resp. un singleton).

Il y a un risque de confusion avec la notation de l'application réciproque (et certains ouvrages utilisent d'ailleurs des notations distinctes). Si f est bijective, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par $f : E \to F$ est égale à l'image $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par $f^{-1} : F \to E$, et il n'y a pas de problème. Mais l'emploi de l'écriture f^{-1} ne signifie pas nécessairement que f est bijective. D'autre part, si f est bijective et si $x \in E$ est l'unique antécédent de y, il ne faut pas confondre l'image réciproque $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, parfois notée $f^{-1}(y)$, et l'image de y par l'application réciproque $f^{-1}(y) = x$.

Voici quelques règles de calcul concernant l'image réciproque d'une partie de F par une application $f : E \to F$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\varnothing) &= \varnothing,\\
f^{-1}(F) &= E,\\
f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\\
f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),\\
f^{-1}(B \setminus A) &= f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A),\\
A \subset B &\Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).
\end{aligned}$$

Démontrons par exemple la cinquième règle. On procède par équivalences :
la relation $x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$ équivaut à $x \in f^{-1}(B)$ et $x \notin f^{-1}(A)$, c'est-à-dire à $f(x) \in B$ et $f(x) \notin A$, donc à $f(x) \in B \setminus A$, d'où la conclusion.

2.2.1 Diagrammes

Lorsqu'il y a plusieurs ensembles et plusieurs applications entre ces ensembles, il peut être commode d'utiliser des *diagrammes* comme celui-ci :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & F \arrow[d, "v"] \\ E' \arrow[r, "f'"] & F' \end{tikzcd}$$

Il arrive fréquemment que l'on veuille exprimer la propriété suivante : si l'on part d'un élément x de l'un de ces ensembles et que l'on calcule ses images successives jusqu'à arriver dans un autre ensemble du diagramme, *le résultat obtenu ne dépend pas du chemin choisi*. On dit alors que *le diagramme est commutatif*. Dans le diagramme ci-dessus, on partirait de $x \in E$, et l'on irait jusqu'à F'. Si le chemin choisi est horizontal puis vertical, le résultat est $v\big(f(x)\big) \in F'$; si le chemin choisi est vertical puis horizontal, le résultat est $f'\big(u(x)\big) \in F'$. Dire que ce diagramme est commutatif signifie donc que $\forall x \in E\ ,\ f'\big(u(x)\big) = v\big(f(x)\big)$, c'est-à-dire que $f' \circ u = v \circ f$.

Exemple. La périodicité d'une fonction de variable réelle peut s'exprimer par un diagramme commutatif. Notons $T_{2\pi}$ la translation $x \mapsto x + 2\pi$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même est 2π-périodique si, et seulement si, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "T_{2\pi}"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Exemple. Anticipons un peu sur la section 4. Supposons que l'on ait une loi de composition interne notée $*$ sur l'ensemble E et une loi de composition interne notée $\star$ sur l'ensemble F. Soit $f : E \to F$ une application.
Dire que f est un morphisme pour les lois $*$ et $\star$ équivaut à dire que le diagramme ci-contre est commutatif, où l'on a respectivement noté m_E et m_F les applications $(x, y) \mapsto x * y$ de $E \times E$ dans E et $(z, t) \mapsto z \star t$ de $F \times F$ dans F.

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "m_E"] \arrow[d, "f \times f"] & E \arrow[d, "f"] \\ F \times F \arrow[r, "m_F"] & F \end{tikzcd}$$

Les deux diagrammes ci-dessous illustrent ainsi les propriétés correspondantes du logarithme et de l'exponentielle (et l'addition sur $\mathbb{R}$, resp. la multiplication sur $\mathbb{R}_+^*$ ont simplement été notées $+$, resp. $\times$).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\ln \times \ln"] & \mathbb{R}_+^* \arrow[d, "\ln"] \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "+"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\exp \times \exp"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\times"] & \mathbb{R}_+^* \end{tikzcd}$$

2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F

Axiome 11. Les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F forment un ensemble, noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemples.

1. L'ensemble $\mathcal{F}(\varnothing, F)$ est le singleton dont l'unique élément est l'application vide.
2. L'ensemble $\mathcal{F}(\{a\}, F)$ est en bijection naturelle avec F par l'application $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{F}(\{a\}, F)$ dans F. En effet, connaître une application f de $\{a\}$ dans F revient à connaître l'image $f(a) \in F$.

3. Si $a \neq b$, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a,b\},F)$ est en bijection naturelle avec F^2 par l'application $f \mapsto \big(f(a), f(b)\big)$ de $\mathcal{F}(\{a,b\},F)$ dans F^2 (connaître une application f de $\{a,b\}$ dans F revient à connaître $f(a), f(b) \in F$).
4. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\varnothing)$ est vide si $E \neq \varnothing$ (et un singleton si $E = \varnothing$).
5. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\{a\})$ est le singleton dont l'unique élément est l'application constante de valeur a.
6. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(E)$; en effet, connaître une application f de E dans $\{0,1\}$ revient à connaître le sous-ensemble $A \subset E$ des antécédents de 1, car alors $B = \complement_E A$ est le sous-ensemble des antécédents de 0. Nous retrouverons ce raisonnement en 3.4, lors de l'étude des fonctions caractéristiques.
7. La composition des applications induit une application $(f,g) \mapsto g \circ f$ de $\mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(F,G)$ dans $\mathcal{F}(E,G)$.
8. L'application $(f,g) \mapsto \, < f, g >$ de $\mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(E,G)$ dans $\mathcal{F}(E, F \times G)$ est une bijection. Soit $A \subset E$.
9. L'application $f \mapsto f_{|A}$ va de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(A,F)$. Si de plus $B \subset E$, on obtient ainsi une application $f \mapsto (f_{|A}, f_{|B})$ de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(A,F) \times \mathcal{F}(B,F)$. Si $A \cup B = E$, cette application est injective ; si $A \cap B = \varnothing$, elle est surjective. La preuve de ces affirmations est laissée au lecteur.

On verra dans le module II.1 (théorème 24 page 76) que si E et F sont finis de cardinaux respectifs $n, p \geqslant 1$, alors $\mathcal{F}(E,F)$ est fini de cardinal p^n. Cela explique que l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ soit parfois noté F^E. Les propriétés élémentaires des puissances :

$$(pp')^n = p^n p'^n,$$
$$p^{n+n'} = p^n p^{n'},$$
$$(p^n)^m = p^{nm}$$

peuvent alors être *interprétées* en termes de bijections. Par exemple, la première et la seconde de ces égalités correspondent respectivement à l'avant-dernière et à la dernière des bijections ci-dessus ; et la troisième à une bijection de $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G))$ dans $\mathcal{F}(E \times F, G)$, qu'on laissera le lecteur expliciter et démontrer. L'analogue des propriétés élémentaires des puissances (rappelées ci-dessus) pour les cardinaux généraux (finis ou infinis) fait l'objet de l'exercice I.1.27.

3 Suites et familles

3.1 Suites d'éléments d'un ensemble

Une notion fondamentale introduite et étudiée dans le secondaire est celle de *suite de nombres réels* : $u_0, u_1, \ldots \in \mathbb{R}$. Chacun des termes de la suite est affecté d'un indice : l'indice du terme général u_n est n. Avant d'en donner une définition formelle, quelques remarques s'imposent :