

**UNIVERZITET U BEOGRADU**  
**FIZIČKI FAKULTET**

**Dr Stevan Stojadinović**  
**ZBIRKA ZADATAKA IZ**  
**ELEKTRONIKE**

**BEOGRAD, 2001.**

## **PREDGOVOR**

Ova zbirka sadrži zadatke iz gradiva koje se predaje u toku zimskog semestra studentima treće godine Fizičkog fakulteta u Beogradu u okviru kurseva Elektronika, Fizička elektronika i Elektronika za fizičare, sa fondom od dva časa nedeljno.

Zbirka sadrži 66 zadataka koji su detaljno rešeni. Zadaci su podeljeni u šest poglavlja i to: Metodi teorije električnih kola, Laplasove transformacije, Tranzistori, Diferencijalni pojačavač, Operacioni pojačavač i Digitalna elektronika. Svako poglavlje sadrži uvod sa kratkim teorijskim objašnjenjem osnovnih pojmova vezanim za dato poglavlje.

Autor se zahvaljuje recenzentima Prof. Dr Aleksandru Stamatoviću i Prof. Dr Ljubiši Zekoviću. Prof. Dr Aleksandar Stamatović je nizom korisnih sugestija doprineo da delovi ovog teksta budu jasniji.

Beograd, 2001.

AUTOR

## SADRŽAJ

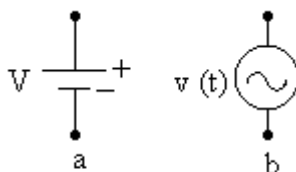
1. METODI TEORIJE ELEKTRIČNIH KOLA.....	1
2. LAPLASOVE TRANSFORMACIJE.....	39
3. TRANZISTORI.....	74
4. DIFERENCIJALNI POJAČAVAČ.....	116
5. OPERACIONI POJAČAVAČ.....	132
6. DIGITALNA ELEKTRONIKA.....	150
7. LITERATURA.....	183

## **1. METODI TEORIJE ELEKTRIČNIH KOLA**

Električno kolo je sistem koji se sastoji od aktivnih elektronskih elemenata (npr. tranzistora), pasivnih elektronskih elemenata (otpora, kapaciteta i induktiviteta) i spoljnih električnih izvora koji služe kao izvori energije. Pri analizi električnih kola uvode se pretpostavke vezane za idealizaciju elektronskih elemenata koji čine električno kolo. Električna kola sa elementima koji imaju tačno definisane osobine, u ograničenom i jasno definisanom delu prostora, nazivaju se kola sa koncentrisanim parametrima. Ovakva kola se mogu analizirati kao sistem fizički odvojenih otpora, kapaciteta i induktiviteta. Ona približno opisuju realno stanje električnog kola na niskim učestanostima i koriste se zato što uprošćavaju fizičku sliku procesa u kolu i matematički aparat za analizu kola.

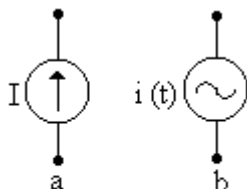
### **NAPONSKI I STRUJNI IZVORI**

Idealni naponski izvor opisuje se naponom čija vrednost i talasni oblik ne zavisi od struje koja kroz njega protiče. Mogu biti jednosmerni naponski izvori (slika 1.a) ili naizmenični naponski izvori (slika 1.b).



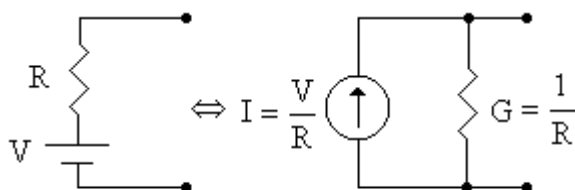
Slika 1

Idealni strujni izvor opisuje se strujom čiji intenzitet i talasni oblik ne zavisi od napona koji vlada na njegovim krajevima. Mogu biti jednosmerni strujni izvori (slika 2.a) ili naizmenični strujni izvori (slika 2.b).



Slika 2

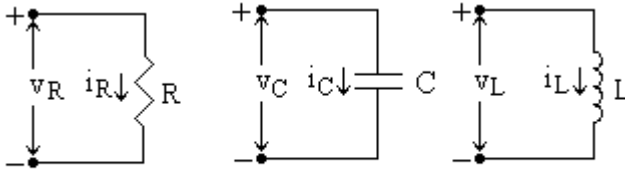
Realni naponski i strujni izvori razlikuju se od idealnih pošto kod njih postoje unutrašnji gubici energije. Realni naponski izvor se aproksimira idealnim naponskim izvorom vezanim u seriju sa otporom, a realni strujni izvor se aproksimira idealnim strujnim izvorom vezanim u paraleli sa otporom. Realni naponski i strujni izvori su ekvivalentni (slika 3).



Slika 3

PASIVNI ELEKTRONSKI ELEMENTI

Na slici 4 prikazana su tri idealna pasivna elementa: otpor R, kapacitet C i induktivitet L.



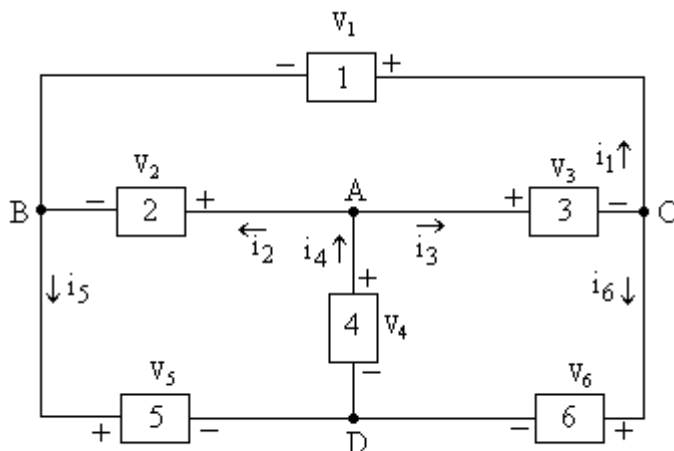
Slika 4

Između napona na ovim elementima i struja koje kroz njih protiču postoje relacije:

$$\begin{aligned}
 v_R(t) &= R i_R(t) & i_R(t) &= \frac{v_R(t)}{R} = G v_R(t) \\
 v_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} & i_L(t) &= \frac{1}{L} \int v_L(t) dt \\
 v_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_C(t) dt & i_C(t) &= C \frac{dv_C(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

KIRHOFOVI ZAKONI

Na slici 5 je prikazano složeno električno kolo. Blokovi sa brojevima od 1 do 6 predstavljaju elemente kola (otpore, kapacitete, induktivitete ili izvore). A, B, C, i D su čvorovi. Svaki deo kola između dva susedna čvora naziva se grana, a zatvoren put čiji je polazni i krajni čvor isti predstavlja konturu (petlju). Matematičko opisivanje složenih sistema vrši se pomoću Kirhofovih zakona o naponima i strujama.



Slika 5

**1) Kirhofov zakon o strujama:** *Algerbarski zbir struja u bilo kom čvoru električnog kola u svakom trenutku jednak je nuli. Kod primene ovog zakona struje koje utiču u čvor imaju znak plus, a koje ističu znak minus.*

Primenom Kirhofovog zakona o strujama na čvor A kola sa slike 5 može se napisati sledeća jednačina:

$$-i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

**2) Kirhofov zakon o naponima:** *Algerbarski zbir elektromotornih sila i padova napona u zatvorenoj električnoj konturi u svakom trenutku jednak je nuli. Kod primene ovog zakona elektromotorne sile se uzimaju sa znakom plus ako se kod ophoda konture prolazi kroz električni izvor od minusa ka plusu, a padovi napona na pasivnim elementima su pozitivni ako je smer ophoda konture suprotan smeru proticanja struje.*

Primenom Kirhofovog zakona o naponima na konturu ABCA kola sa slike 5 može se napisati sledeća jednačina:

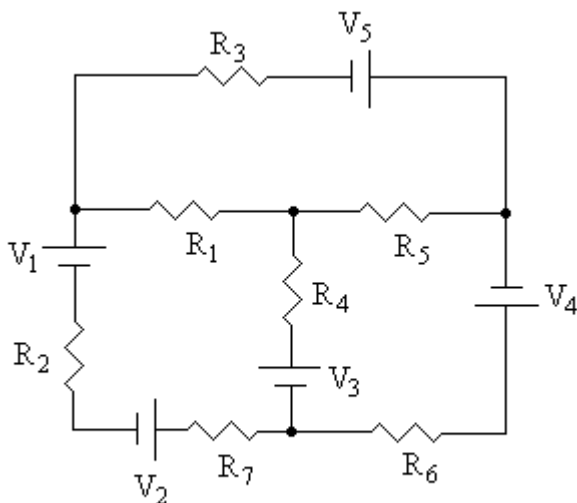
$$-v_2 + v_1 + v_3 = 0$$

Ako je broj čvorova u kolu  $N_1$ , a broj grana  $N_2$ , tada je broj nepoznatih struja jednak je broju grana. Primenjujući Kirchofove zakone na sve čvorove i sve zatvorene putanje u kolu, dobija se veći broj jednačina nego što je potrebno. Pri tome su neke jednačine posledica ostalih. Da bi se dobilo  $N_2$  nezavisnih jednačina, koliko ima nepoznatih struja, treba Kirchofov zakon o strujama primeniti na  $N_1 - 1$  čvor, a ostale jednačine se dobijaju primenom Kirchofovog zakona o naponima na  $N = N_2 - (N_1 - 1)$  zatvorenih putanja u kolu koje se razlikuju bar po jednoj grani.

Za matematičko opisivanje većine složenih kola potrebno je korišćenje oba Kirchofova zakona. Međutim, u mnogim slučajevima primena metoda i teorema iz teorije električnih kola uprošćava postavljen zadatak.



1.1) Za kolo sa slike 1.1 odrediti struje svih grana primenom metode konturnih struja. Poznato je:  $V_1 = 6 \text{ V}$ ,  $V_2 = 3 \text{ V}$ ,  $V_3 = 12 \text{ V}$ ,  $V_4 = 6 \text{ V}$ ,  $V_5 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 300 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 200 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 300 \text{ } \Omega$ ,  $R_5 = 200 \text{ } \Omega$ ,  $R_6 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R_7 = 200 \text{ } \Omega$ .



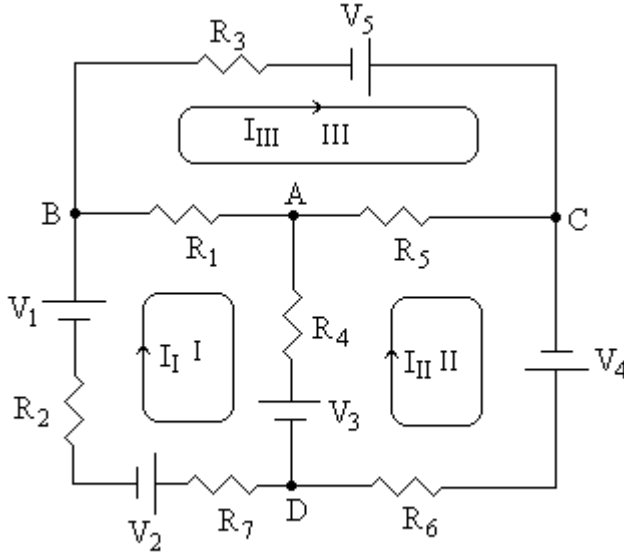
Slika 1.1

Rešenje:

Metoda konturnih struja primenjuje se kod kola sa naponskim izvorima. Ovom metodom određuju se struje primenom Kirhofovog zakona o naponima. Prilikom odabira kontura treba voditi računa da svaka odabrana kontura sadrži barem jednu granu po kojoj se ona razlikuje od ostalih kontura. Ukupan broj kontura koje treba odabrati, odnosno ukupan broj jednačina koje treba napisati metodom konturnih struja je  $N = N_2 - (N_1 - 1)$ , gde je:  $N_2$  – broj grana u kolu,  $N_1$  – broj čvorova u kolu,  $N$  – broj jednačina.

U kolu na slici 1.1.1 su uočene tri konture numerisane sa indeksima I (kontura – ADBA), II (kontura – ACDA) i III (kontura – BCAB) sa

konturnim strujama  $I_I$ ,  $I_{II}$  i  $I_{III}$  respektivno. Primenom Kirhofovog zakona o naponima na konture I, II i III mogu se napisati sledeće jednačine:



Slika 1.1.1

Za konturu I:

$$V_1 - V_2 - V_3 - (R_2 + R_7)I_I - R_4(I_I - I_{II}) - R_1(I_I - I_{III}) = 0 \quad (1.1.1)$$

Za konturu II:

$$V_3 + V_4 - R_6I_{II} - R_4(I_{II} - I_I) - R_5(I_{II} - I_{III}) = 0 \quad (1.1.2)$$

Za konturu III:

$$V_5 - R_3I_{III} - R_1(I_{III} - I_I) - R_5(I_{III} - I_{II}) = 0 \quad (1.1.3)$$

Posle sređivanja ove jednačine postaju:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4 + R_7)I_I - R_4I_{II} - R_1I_{III} &= V_1 - V_2 - V_3 \\ -R_4I_I + (R_4 + R_5 + R_6)I_{II} - R_5I_{III} &= V_3 + V_4 \\ -R_1I_I - R_5I_{II} + (R_1 + R_3 + R_5)I_{III} &= V_5 \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} R_{I,I}I_I + R_{I,II}I_{II} + R_{I,III}I_{III} &= V_I \\ R_{II,I}I_I + R_{II,II}I_{II} + R_{II,III}I_{III} &= V_{II} \\ R_{III,I}I_I + R_{III,II}I_{II} + R_{III,III}I_{III} &= V_{III} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

gde su:

$$\begin{aligned} R_{I,I} &= R_1 + R_2 + R_4 + R_7, R_{II,II} = R_4 + R_5 + R_6, R_{III,III} = R_1 + R_3 + R_5 \\ R_{I,II} &= R_{II,I} = -R_4, R_{I,III} = R_{III,I} = -R_1, R_{II,III} = R_{III,II} = -R_5 \\ V_I &= V_1 - V_2 - V_3, V_{II} = V_3 + V_4, V_{III} = V_5 \end{aligned}$$

Otpornost  $R_{ij}$  za  $i = j$  ( $i, j = I, II, III$ ) predstavlja sopstvenu otpornost pojedinih kontura.

Otpornost  $R_{ij}$  za  $i \neq j$  ( $i, j = I, II, III$ ) predstavlja zajedničku otpornost  $i - te$  i  $j - te$  konture uzetu sa negativnim znakom.

Elektromotorna sila  $V_i$  ( $i = I, II, III$ ) predstavlja sumu elektromotornih sila za datu konturu. U matičnom obliku prethodni sistem jednačina izgleda:

$$\begin{bmatrix} R_{I,I} & R_{I,II} & R_{I,III} \\ R_{II,I} & R_{II,II} & R_{II,III} \\ R_{III,I} & R_{III,II} & R_{III,III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

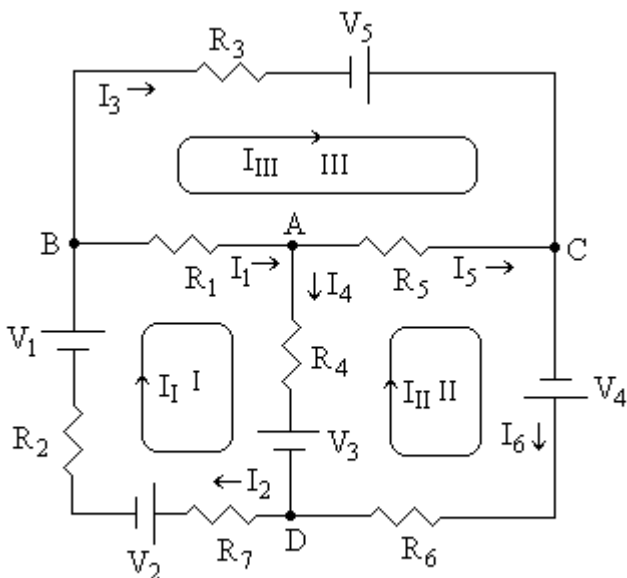
ili kraće  $[R] \cdot [I] = [V]$ , gde su:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{I,I} & R_{I,II} & R_{I,III} \\ R_{II,I} & R_{II,II} & R_{II,III} \\ R_{III,I} & R_{III,II} & R_{III,III} \end{bmatrix}, [I] = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}, [V] = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \end{bmatrix}$$

Matrica  $[R]$  je matrica sistema. Ova matrica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Na glavnoj dijagonali nalaze se elementi koji predstavljaju sopstvene otpornosti pojedinih kontura, a na mestima  $R_{ij}$  ( $i \neq j$ ) elementi koji predstavljaju zajedničke otpornosti  $i - te$  i  $j - te$  konture uzete sa negativnim znakom. Matrice  $[V]$  i  $[I]$  su matrice kolona.  $[V]$  je matrica pobuda, a  $[I]$  matrica konturnih struja.

Rešavanjem sistema jednačina (1.1.4) dobija se:

$$I_I = 0.01 \text{ A}, I_{II} = 0.04 \text{ A}, I_{III} = 0.02 \text{ A}.$$



Slika 1.1.2

Sa slike 1.1.2 se vidi da su:

$$\text{Struja kroz granu BA: } I_1 = I_I - I_{III} = -0.01 \text{ A}$$

$$\text{Struja kroz granu DB: } I_2 = I_I = 0.01 \text{ A}$$

Struja kroz granu BC:  $I_3 = I_{III} = 0.02 \text{ A}$

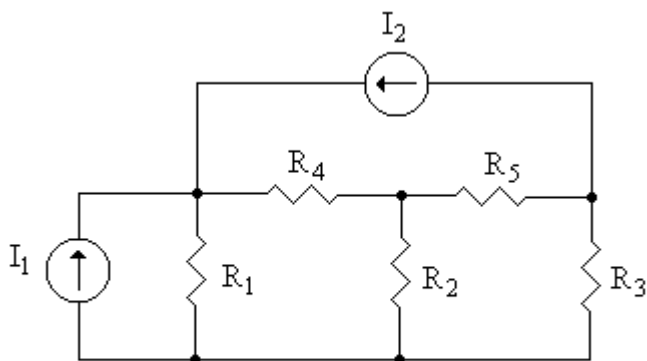
Struja kroz granu AD:  $I_4 = I_I - I_{II} = -0.03 \text{ A}$

Struja kroz granu AC:  $I_5 = I_{II} - I_{III} = 0.02 \text{ A}$

Struja kroz granu CD:  $I_6 = I_{II} = 0.04 \text{ A}$

Jednačine konturnih struja su izvedene polazeći od jednačina koje su napisane primenom Kirhofovog zakona o naponima. Prednost metode konturnih struja je u tome što se umesto pisanja šest jednačina sa šest nepoznatih struja grana, primenom Kirhofovih zakona, pišu tri jednačine za konture I, II i III. Rešavanjem ovih jednačina dobijaju se konturne struje  $I_I$ ,  $I_{II}$  i  $I_{III}$  koje su i struje u granama po kojima se pojedine konture međusobno razlikuju (struje  $I_2$ ,  $I_3$  i  $I_6$ ), dok se struje u ostalim granama dobijaju iz jednačina konturnih struja.

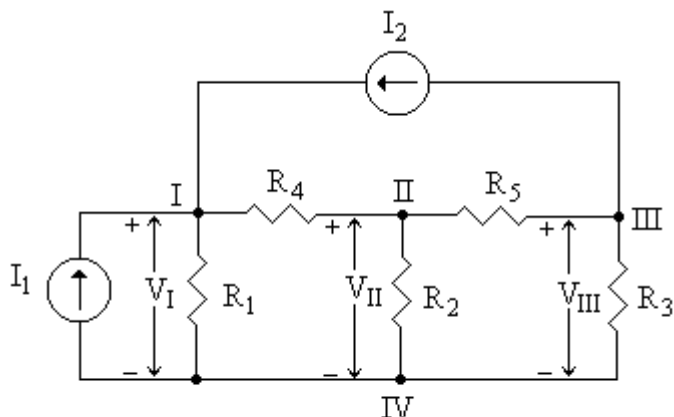
1.2) Za kolo sa slike 1.2 izračunati struje svih grana primenom metode napona čvorova. Poznato je:  $I_1 = 0.2 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0.1 \text{ A}$ ,  $R_1 = 200 \ \Omega$ ,  $R_2 = 100 \ \Omega$ ,  $R_3 = 300 \ \Omega$ ,  $R_4 = 100 \ \Omega$ ,  $R_5 = 200 \ \Omega$ .



Slika 1.2

Rešenje:

Metoda napona čvorova primenjuje se u kolima sa strujnim izvorima. Ovom metodom određuju se naponi između pojedinih čvorova u kolu i jednog proizvoljnog referentnog čvora koristeći Kirhofov zakon o strujama. Za referentni čvor najpogodnije je uzeti čvor koji je granama spojen sa najvećim brojem čvorova. Tada se najveći broj od traženih struja dobija neposredno iz napona čvorova. Ukupan broj jednačina koje treba napisati metodom napona čvorova je:  $N = N_1 - 1$ , gde je:  $N_1$  – broj čvorova u kolu,  $N$  – broj jednačina.



Slika 1.2.1

Kao referentni čvor u kolu na slici 1.2.1 uzet je čvor IV. Primenom Kirhofovog zakona o strujama za čvorove I, II i III mogu se napisati sledeće jednačine:

Za čvor I:

$$I_1 + I_2 - \frac{1}{R_1} V_I - \frac{1}{R_4} (V_I - V_{II}) = 0 \quad (1.2.1)$$

Za čvor II:

$$-\frac{1}{R_2}V_{II} - \frac{1}{R_4}(V_{II} - V_I) - \frac{1}{R_5}(V_{II} - V_{III}) = 0 \quad (1.2.2)$$

Za čvor III:

$$-I_2 - \frac{1}{R_3}V_{III} - \frac{1}{R_5}(V_{III} - V_{II}) = 0 \quad (1.2.3)$$

Posle sređivanja ove jednačine postaju:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)V_I - \frac{1}{R_4}V_{II} + 0 \cdot V_{III} = I_1 + I_2$$

$$-\frac{1}{R_4}V_I + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_{II} - \frac{1}{R_5}V_{III} = 0 \quad (1.2.4)$$

$$0 \cdot V_I - \frac{1}{R_5}V_{II} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)V_{III} = -I_2$$

odnosno:

$$G_{I,I}V_I + G_{I,II}V_{II} + G_{I,III}V_{III} = I_I$$

$$G_{II,I}V_I + G_{II,II}V_{II} + G_{II,III}V_{III} = I_{II} \quad (1.2.5)$$

$$G_{III,I}V_I + G_{III,II}V_{II} + G_{III,III}V_{III} = I_{III}$$

gde su:

$$G_{I,I} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}, \quad G_{II,II} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}, \quad G_{III,III} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5},$$

$$G_{I,II} = G_{II,I} = -\frac{1}{R_4}, \quad G_{I,III} = G_{III,I} = 0, \quad G_{II,III} = G_{III,II} = -\frac{1}{R_5}$$

$$I_I = I_1 + I_2, \quad I_{II} = 0, \quad I_{III} = -I_2$$

Provodnost  $G_{ij}$  za  $i = j$  ( $i, j = I, II, III$ ) predstavlja sopstvenu provodnost pojedinih čvorova.

Provodnost  $G_{ij}$  za  $i \neq j$  ( $i, j = I, II, III$ ) predstavlja zajedničku provodnost  $i - \text{tog } i - \text{tog}$  čvora uzetu sa negativnim znakom.

Struja  $I_i$  ( $i = I, II, III$ ) predstavlja sumu struja svih strujnih izvora vezanih za odgovarajući čvor .

U matričnom obliku prethodni sistem jednačina izgleda:

$$\begin{bmatrix} G_{I,I} & G_{I,II} & G_{I,III} \\ G_{II,I} & G_{II,II} & G_{II,III} \\ G_{III,I} & G_{III,II} & G_{III,III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

ili kraće  $[G] \cdot [V] = [I]$ , gde su:

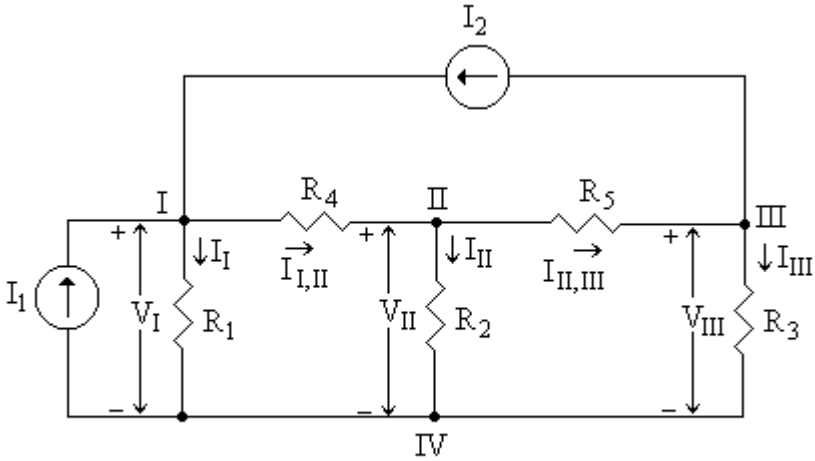
$$[G] = \begin{bmatrix} G_{I,I} & G_{I,II} & G_{I,III} \\ G_{II,I} & G_{II,II} & G_{II,III} \\ G_{III,I} & G_{III,II} & G_{III,III} \end{bmatrix}, [V] = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \end{bmatrix}, [I] = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}$$

Matrica  $[G]$  je matrica sistema. Ova matrica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Na glavnoj dijagonali nalaze se elementi koji predstavljaju sopstvene provodnosti pojedinih čvorova, a na mestima  $G_{ij}$  ( $i \neq j$ ) elementi koji predstavljaju zajedničke provodnosti  $i - \text{tog } i - \text{tog}$  čvora uzete sa negativnim znakom. Matrice  $[V]$  i  $[I]$  su matrice kolona.  $[I]$  je matrica pobuda, a  $[V]$  matrica napona između čvorova.

Rešavanjem sistema jednačina (1.2.4) dobija se:

$$V_I = 26.1 \text{ V}, V_{II} = 9.1 \text{ V}, V_{III} = -6.5 \text{ V}.$$





Slika 1.2.2

Sa slike 1.2.2 se vidi da su:

$$\text{Struja kroz granu I-IV: } I_I = \frac{V_I}{R_1} = 0.131 \text{ A}$$

$$\text{Struja kroz granu II-IV: } I_{II} = \frac{V_{II}}{R_2} = 0.091 \text{ A}$$

$$\text{Struja kroz granu III-IV: } I_{III} = \frac{V_{III}}{R_3} = -0.022 \text{ A}$$

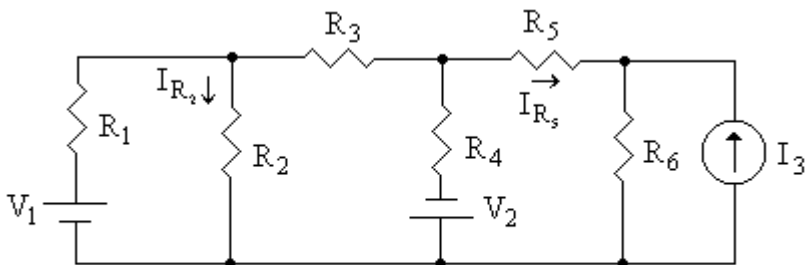
$$\text{Struja kroz granu I-II: } I_{I,II} = \frac{V_I - V_{II}}{R_4} = 0.17 \text{ A}$$

$$\text{Struja kroz granu II-III: } I_{II,III} = \frac{V_{II} - V_{III}}{R_5} = 0.078 \text{ A}$$

1.3) Izračunati struje kroz otpornike  $R_2$  i  $R_5$  u kolu sa slike 1.3:

- a) metodom konturnih struja
- b) metodom napona čvorova

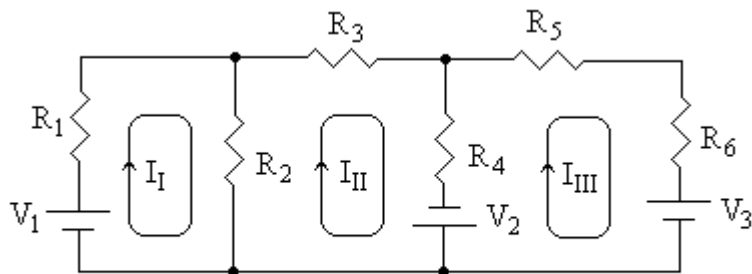
Poznato je:  $V_1 = 12 \text{ V}$ ,  $V_2 = 16 \text{ V}$ ,  $I_3 = 0.2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 200 \text{ } \Omega$ ,  
 $R_3 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 200 \text{ } \Omega$ ,  $R_5 = 300 \text{ } \Omega$ ,  $R_6 = 100 \text{ } \Omega$ .



Slika 1.3

Rešenje:

a) Ako se strujni izvor zameni ekvivalentnim naponskim izvorom kolo sa slike 1.3 postaje:



Slika 1.3.1

gde je:  $V_3 = R_6 I_3 = 20 \text{ V}$ . Primenom metode konturnih struja dobija se:

$$\begin{aligned}
 (R_1 + R_2)I_I - R_2 I_{II} &= V_1 \\
 -R_2 I_I + (R_2 + R_3 + R_4)I_{II} - R_4 I_{III} &= V_2 \\
 -R_4 I_{II} + (R_4 + R_5 + R_6)I_{III} &= -(V_2 + V_3)
 \end{aligned}
 \tag{1.3.1}$$

Rešavanjem sistema jednačina (1.3.1) dobija se da su konturne struje:

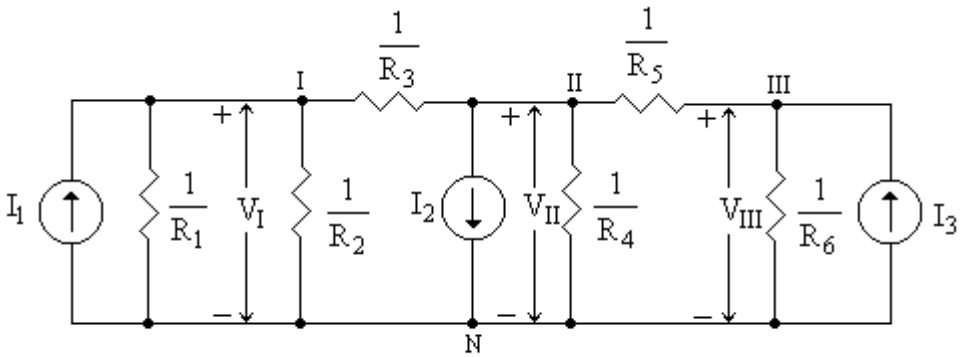
$$I_I = 0.067 \text{ A}, \quad I_{II} = 0.04 \text{ A}, \quad I_{III} = -0.047 \text{ A}.$$

Struje kroz otpornike  $R_2$  i  $R_5$  su:

$$I_{R_2} = I_I - I_{II} = 0.027 \text{ A}$$

$$I_{R_5} = I_{III} = -0.047 \text{ A}$$

b) Ako se naponski izvori zamene ekvivalentnim strujnim izvorima kolo sa slike 1.3 postaje:



Slika 1.3.2

gde su:  $I_1 = \frac{V_1}{R_1} = 0.12 \text{ A}$  i  $I_2 = \frac{V_2}{R_4} = 0.08 \text{ A}$ . Primenom metode napona

čvorova dobija se:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_I - \frac{1}{R_3}V_{II} = I_1$$

$$-\frac{1}{R_3}V_I + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_{II} - \frac{1}{R_5}V_{III} = -I_2 \quad (1.3.2)$$

$$-\frac{1}{R_5}V_{II} + \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_{III} = I_3$$

Rešavanjem sistema jednačina (1.3.2) dobija se da su naponi čvorova:

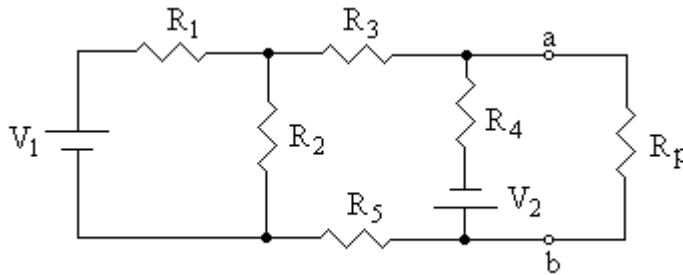
$$V_I = 5.333 \text{ V}, \quad V_{II} = 1.333 \text{ V}, \quad V_{III} = 15.333 \text{ V}.$$

Struje kroz otpornike  $R_2$  i  $R_5$  su:

$$I_{R_2} = \frac{V_I}{R_2} = 0.027 \text{ A}$$

$$I_{R_5} = \frac{V_{II} - V_{III}}{R_5} = -0.047 \text{ A}$$

1.4) Za kolo sa slike 1.4 odrediti struju kroz potrošač  $R_p$  koristeći Tevenenovu teoremu i princip superpozicije. Poznato je:  $V_1 = 28 \text{ V}$ ,  $V_2 = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 300 \Omega$ ,  $R_5 = 100 \Omega$ ,  $R_p = 200 \Omega$ .

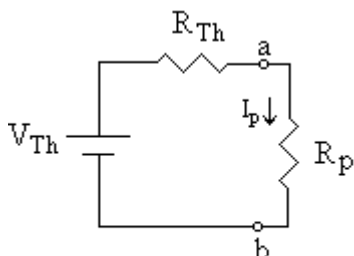


Slika 1.4

Rešenje:

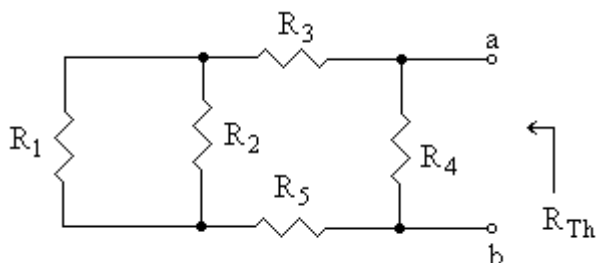
Prema Tevenenovoj teoremi svaka dva kraja linearnog električnog kola, sa proizvoljnim brojem naponskih izvora i impedansi, mogu se svesti na kolo sa jednim naponskim izvorom vezanim u seriju sa impedansom. Naponski izvor je jednak naponu na krajevima kola kada je kolo otvoreno, a serijska impedansa jednaka je ukupnoj impedansi, pod uslovom da su svi naponski izvori koji deluju u kolu kratko vezani.

Primenom Tevenenove teoreme kolo sa slike 1.4, levo od tačaka a i b, može se zameniti ekvivalentnim naponskim izvorom  $V_{Th}$  vezanim u seriju sa ekvivalentnom otpornošću  $R_{Th}$  (slika 1.4.1).



Slika 1.4.1

Da bi se odredila otpornost  $R_{Th}$  umesto naponskih izvora  $V_1$  i  $V_2$  treba staviti kratku vezu (slika 1.4.2).



Slika 1.4.2

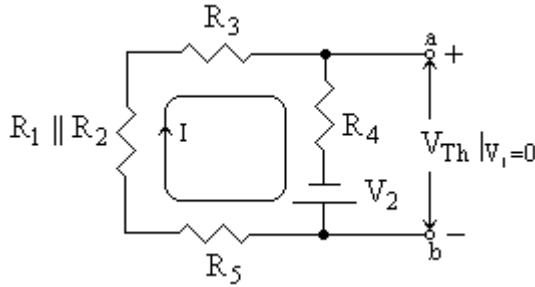
Ekvivalentna Tevenenova otpornost  $R_{Th}$  je:

$$R_{Th} = [(R_1 \parallel R_2) + R_3 + R_5] \parallel R_4 = 165 \Omega \quad (1.4.1)$$

Ekvivalentni Tevenenov naponski izvor izračunava se metodom superpozicije:

$$V_{Th} = V_{Th} |_{V_1=0} + V_{Th} |_{V_2=0} \quad (1.4.2)$$

Za  $V_1 = 0$  kolo sa slike 1.4, levo od tačaka a i b, izgled kao kolo na slici 1.4.3.



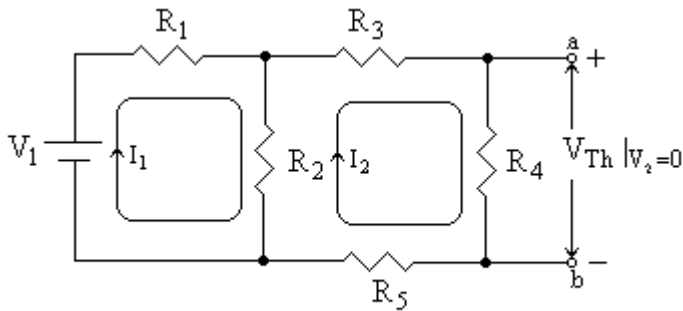
Primenom Kirhofovog zakona o naponima na kolo sa slike 1.4.3 dobija se da je struja I:

$$I = \frac{V_2}{R_1 \parallel R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \quad (1.4.3)$$

Tada je:

$$V_{Th} |_{V_1=0} = R_4 I - V_2 = -\frac{R_1 \parallel R_2 + R_3 + R_5}{R_1 \parallel R_2 + R_3 + R_4 + R_5} V_2 = -3.3 \text{ V} \quad (1.4.4)$$

Za  $V_2 = 0$  kolo sa slike 1.4, levo od tačaka a i b, izgled kao kolo na slici 1.4.4.



Slika 1.4.4

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 1.4.4 dobija se:

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 = V_1 \quad (1.4.5)$$

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)I_2 = 0 \quad (1.4.6)$$

Eliminacijom struje  $I_1$  iz jednačina (1.4.5) i (1.4.6) dobija se:

$$I_2 = \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + R_2(R_3 + R_4 + R_5)} V_1 \quad (1.4.7)$$

Tada je:

$$V_{Th} |_{V_2=0} = I_2 R_4 = 4.2 \text{ V} \quad (1.4.8)$$

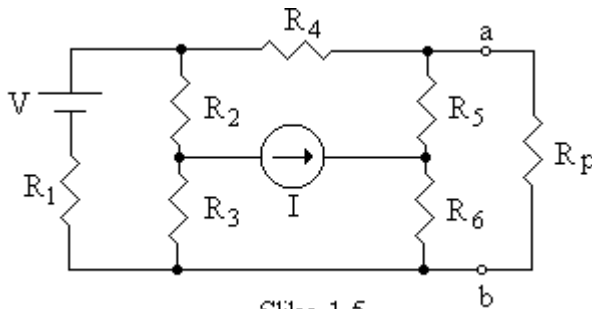
Ekvivalentni Tevenenov naponski izvor je:

$$V_{Th} = V_{Th} |_{V_1=0} + V_{Th} |_{V_2=0} = 0.9 \text{ V} \quad (1.4.9)$$

Struja kroz potrošač  $R_p$  je prema slici 1.4.1:

$$I_p = \frac{V_T}{R_p + R_T} = 2.466 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad (1.4.10)$$

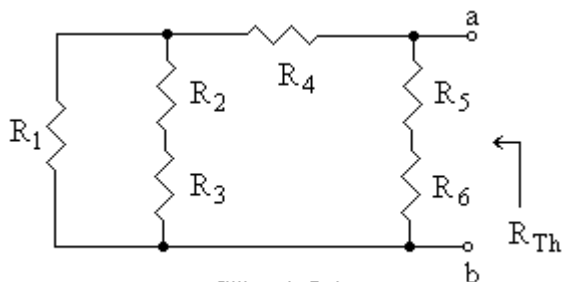
1.5) Za kolo sa slike 1.5 odrediti struju kroz potrošač  $R_p$  koristeći Tevenenovu teoremu i princip superpozicije. Poznato je:  $I = 0.002 \text{ A}$ ,  $V = 16 \text{ V}$ ,  $R_1 = 150 \ \Omega$ ,  $R_2 = 150 \ \Omega$ ,  $R_3 = 100 \ \Omega$ ,  $R_4 = 150 \ \Omega$ ,  $R_5 = 100 \ \Omega$ ,  $R_6 = 200 \ \Omega$ ,  $R_p = 300 \ \Omega$ .



Slika 1.5

Rešenje:

Da bi odredili otpornost  $R_{Th}$  prema Tevenenovoj teoremi umesto naponskog izvora  $V$  treba staviti kratku vezu, a umesto strujnog izvora  $I$  otvorenu vezu (slika 1.5.1).



Slika 1.5.1

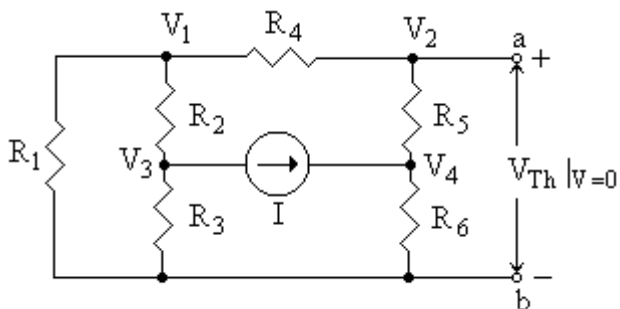
Ekvivalentna Tevenenova otpornost  $R_{Th}$  je:

$$R_{Th} = [(R_2 + R_3) \parallel R_1 + R_4] \parallel (R_5 + R_6) = 134.5\Omega \quad (1.5.1)$$

Ekvivalentni Tevenenov naponski izvor izračunava se metodom superpozicije:

$$V_{Th} = V_{Th} |_{V=0} + V_{Th} |_{I=0} \quad (1.5.2)$$

Za  $V = 0$  kolo sa slike 1.5, levo od tačaka  $a$  i  $b$ , izgled kao kolo na slici 1.5.2.



Slika 1.5.2



Primenom metode napona čvorova na kolo sa slike 1.5.2 dobija se:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)V_1 - \frac{1}{R_4}V_2 - \frac{1}{R_2}V_3 + 0 \cdot V_4 = 0 \quad (1.5.3)$$

$$-\frac{1}{R_4}V_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_2 + 0 \cdot V_3 - \frac{1}{R_5}V_4 = 0 \quad (1.5.4)$$

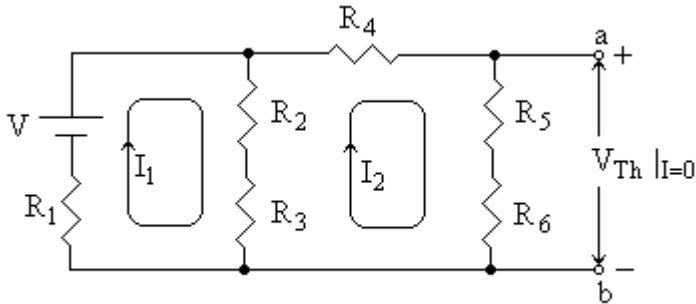
$$-\frac{1}{R_2}V_1 + 0 \cdot V_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_3 + 0 \cdot V_4 = -I \quad (1.5.5)$$

$$0 \cdot V_1 - \frac{1}{R_5}V_2 + 0 \cdot V_3 + \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_4 = I \quad (1.5.6)$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se:

$V_1 = 0.007 \text{ V}$ ,  $V_2 = 0.138 \text{ V}$ ,  $V_3 = -0.117 \text{ V}$  i  $V_4 = 0.225 \text{ V}$ . Sa slike 1.5.2 se vidi da je  $V_2 = V_{Th} \big|_{V=0} = 0.138 \text{ V}$ .

Za  $I = 0$  kolo sa slike 1.5 levo, od tačaka a i b, izgled kao kolo na slici 1.5.3.



Slika 1.5.3

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 1.5.3 dobija se:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_1 - (R_2 + R_3)I_2 = V \quad (1.5.7)$$

$$-(R_2 + R_3)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_2 = 0 \quad (1.5.8)$$

Eliminacijom struje  $I_1$  iz jednačina (1.5.7) i (1.5.8) dobija se:

$$I_2 = \frac{R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + (R_2 + R_3)(R_4 + R_5 + R_6)} V \quad (1.5.9)$$

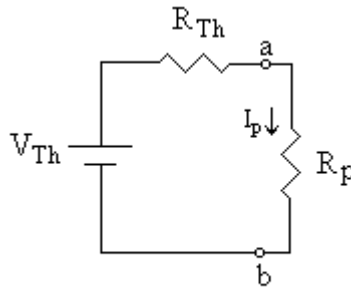
Tada je:

$$V_{Th} |_{I=0} = (R_5 + R_6)I_2 = 5.5 V \quad (1.5.10)$$

Ekvivalentni Tevenenov naponski izvor je:

$$V_{Th} = V_{Th} |_{V=0} + V_{Th} |_{I=0} = 5.638 V \quad (1.5.11)$$

Primenom Tevenenove teoreme kolo sa slike 1.5 može se prikazati kolom na slici 1.5.4.

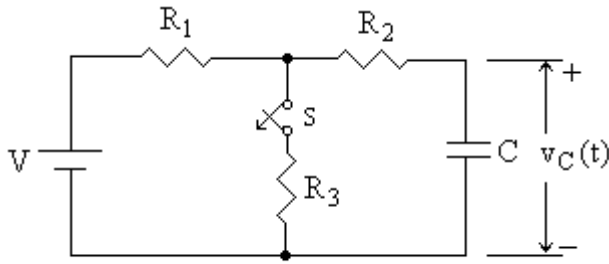


Slika 1.5.4

Struja kroz potrošač  $R_P$  je:

$$I_P = \frac{V_{Th}}{R_P + R_T} = 0.013 A \quad (1.5.12)$$

1.6) Odrediti zakon promene napona na kondenzatoru C u kolu sa slike 1.6 posle otvaranja prekidača S. Pretpostaviti da je prekidač dovoljno vremena bio zatvoren tako da se u kolu uspostavio ustaljen režim.



Slika 1.6

Rešenje:

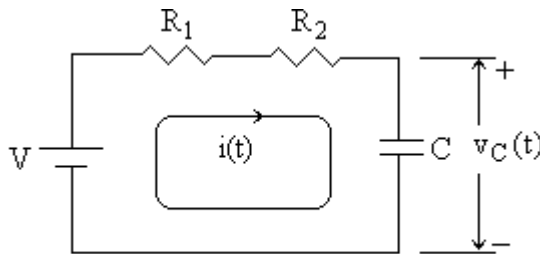
Kako je pre otvaranja prekidača S u kolu vladao ustaljen režim, struja kroz kondenzator  $i_C = 0$ . Napon na kondenzatoru neposredno pre otvaranja prekidača S je:

$$v_C(t = 0_-) = V \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (1.6.1)$$

Prilikom otvaranja prekidača S napon na kondenzatoru se ne menja trenutno, odnosno:

$$v_C(t = 0_+) = v_C(t = 0_-) = V \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (1.6.2)$$

Posle otvaranja prekidača S kolo sa slike 1.6 izgleda kao kolo na slici 1.6.1.



Slika 1.6.1

Primenom Kirhofovog zakona o naponima na kolo sa slike 1.6.1 dobija se:

$$(R_1 + R_2)i(t) + v_C(t) = V \quad (1.6.3)$$

Kako su struja  $i$  i napon na kondenzatoru vezani relacijom:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1.6.4)$$

jednačina (1.6.3) može se napisati u obliku:

$$(R_1 + R_2)C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V \quad (1.6.5)$$

Jednačina (1.6.5) je nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Rešenje ove jednačine jednako je zbiru opšteg rešenja homogene jednačine:

$$(R_1 + R_2)C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad (1.6.6)$$

i jednog partikularnog rešenja nehomogene jednačine (1.6.5).

Opšte rešenje homogene jednačine (1.6.6) određuje slobodan režim, koji zavisi samo od električnih osobina kola, a ne zavisi od karaktera izvora koji se nalazi u kolu, i oblika je:

$$v_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.6.7)$$

gde je  $\tau = (R_1 + R_2)C$  vremenska konstanta kola.

Partikularno rešenje nehomogene jednačine (1.6.5) određuje ustaljen režim u kolu, koji zavisi od karaktera izvora koji u njemu deluje, i oblika je:

$$v_{Cp} = V \quad (1.6.8)$$

Opšte rešenje jednačine (1.6.5) je:

$$v_C(t) = v_{Ch}(t) + v_{Cp} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + V \quad (1.6.9)$$

Konstanta  $A$  se određuje iz početnih uslova. U trenutku otvaranja prekidača napon na kondenzatoru dat je jednačinom (1.6.2) i tada je:

$$v_C(t = 0_+) = V \frac{R_3}{R_1 + R_3} = A + V \quad (1.6.10)$$

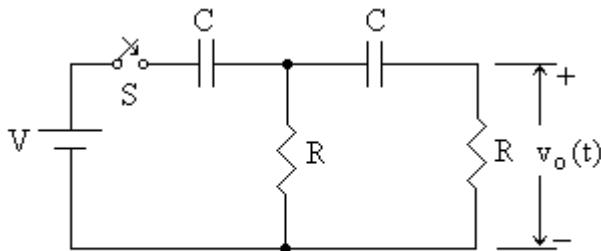
odnosno:

$$A = -V \frac{R_1}{R_1 + R_3} \quad (1.6.11)$$

Zakon promene napona na kondenzatoru posle otvaranja prekidača  $S$  je:

$$v_C(t) = V \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_3} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1.6.12)$$

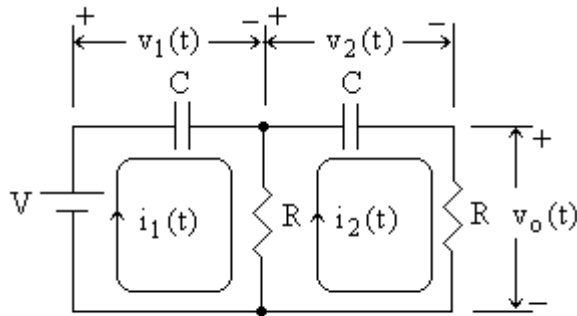
1.7) Odrediti zakon promene napona na otporniku  $R$  u kolu sa slike 1.7 posle zatvaranja prekidača  $S$ . Svi početni uslovi su nula.



Slika 1.7

Rešenje:

Posle zatvaranja prekidača  $S$  kolo sa slike 1.7 izgleda kao kolo na slici 1.7.1.



Slika 1.7.1

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 1.7.1 dobija se:

$$V = v_1(t) + Ri_1(t) - Ri_2(t) = v_1(t) + RC \frac{dv_1(t)}{dt} - RC \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (1.7.1)$$

$$0 = -Ri_1(t) + v_2(t) + 2Ri_2(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt} + v_2(t) + 2RC \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (1.7.2)$$

Jednačina (1.7.2) može se napisati u obliku:

$$2RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = RC \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (1.7.3)$$

Sabiranjem jednačina (1.7.1) i (1.7.2) dobija se:

$$V = v_1(t) + v_2(t) + RC \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (1.7.4)$$

Diferenciranjem jednačine (1.7.4) dobija se:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = -RC \frac{d^2v_2(t)}{dt^2} - \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (1.7.5)$$

Iz jednačina (1.7.3) i (1.7.5) dobija se sledeća diferencijalna jednačina:

$$2RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = -R^2C^2 \frac{d^2v_2(t)}{dt^2} - RC \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (1.7.6)$$

odnosno:

$$R^2 C^2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + 3RC \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = 0 \quad (1.7.7)$$

Jednačina (1.7.7) je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda. Rešenje ove jednačine je oblika:

$$v_2(t) = Ke^{pt} \quad (1.7.8)$$

Zamenom jednačine (1.7.8) u jednačinu (1.7.7) dobija se:

$$R^2 C^2 p^2 + 3RCp + 1 = 0 \quad (1.7.9)$$

Jednačina (1.7.9) je karakteristična jednačina. Koreni karakteristične jednačine su:

$$p_{1,2} = \frac{-3RC \pm \sqrt{9R^2 C^2 - 4R^2 C^2}}{2R^2 C^2} = \frac{-3RC \pm \sqrt{5}R^2 C^2}{2R^2 C^2} \quad (1.7.10)$$

odnosno:

$$p_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2RC} = -0.38 \frac{1}{RC} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2RC} = -2.62 \frac{1}{RC}$$

Zakon promene napona  $v_2(t)$  je:

$$v_2(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} \quad (1.7.11)$$

Zakon promene napona  $v_o(t)$  je:

$$v_o(t) = Ri_2(t) = RC(K_1 p_1 e^{p_1 t} + K_2 p_2 e^{p_2 t}) \quad (1.7.12)$$

Konstante  $K_1$  i  $K_2$  određuju se iz početnih uslova:

$$v_2(0_+) = 0 = K_1 + K_2 \quad (1.7.13)$$

$$v_o(0_+) = V = RC(K_1 p_1 + K_2 p_2) \quad (1.7.14)$$

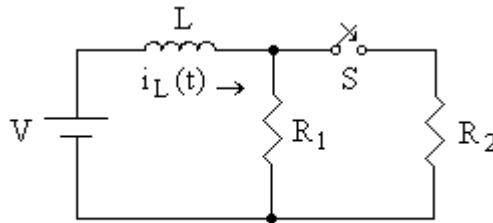
Iz jednačina (1.7.13) i (1.7.14) sledi da su konstante  $K_1$  i  $K_2$ :

$$K_1 = \frac{V}{RC(p_1 - p_2)} = 0.446 \cdot V \quad \text{i} \quad K_2 = -\frac{V}{RC(p_1 - p_2)} = -0.446 \cdot V$$

Zakon promene napona  $v_o(t)$  je:

$$v_o(t) = V \left[ 1.17 \cdot e^{-\frac{2.62}{RC}t} - 0.17 \cdot e^{-\frac{0.38}{RC}t} \right] \quad (1.7.15)$$

1.8) Odrediti zakon promene struje kroz otpornik  $R_2$  u kolu sa slike 1.8 posle zatvaranja prekidača S. Pretpostaviti da je pre zatvaranja prekidača u kolu vladao ustaljen režim.



Slika 1.8

Rešenje:

Kako je pre zatvaranja prekidača S u kolu vladao ustaljen režim, napon na zavojnici je  $v_L = 0$ . Struja kroz zavojnicu neposredno pre otvaranja prekidača je:

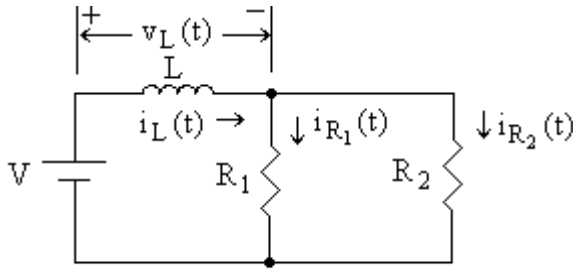
$$i_L(t = 0_-) = \frac{V}{R_1} \quad (1.8.1)$$

Prilikom otvaranja prekidača S struja kroz zavojnicu se ne menja trenutno, odnosno:

$$i_L(t = 0_+) = i_L(t = 0_-) = \frac{V}{R_1} \quad (1.8.2)$$

Posle zatvaranja prekidača S kolo sa slike 1.8 izgleda kao kolo na slici 1.8.1.





Slika 1.8.1

Primenom Kirhofovog zakona o naponima na kolo sa slike 1.8.1 dobija se:

$$v_L(t) + (R_1 \parallel R_2)i_L(t) = V \quad (1.8.3)$$

Kako su struja i napon na zavojnici vezani relacijom:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.8.4)$$

jednačina (1.8.3) postaje:

$$\frac{L}{R_1 \parallel R_2} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{V}{R_1 \parallel R_2} \quad (1.8.5)$$

Rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (1.8.5) je:

$$i_L(t) = Ae^{-\gamma t} + \frac{V}{(R_1 \parallel R_2)} \quad (1.8.6)$$

gde je  $\gamma = \frac{R_1 \parallel R_2}{L}$ .

Konstanta A se određuje iz početnih uslova. U trenutku zatvaranja prekidača struja kroz zavojnicu je data jednačinom (1.8.2) i tada je:

$$\frac{V}{R_1} = A + \frac{V}{R_1 \parallel R_2} \quad (1.8.7)$$

odnosno:

$$A = V \left( \frac{1}{R_1} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = -\frac{V}{R_2} \quad (1.8.8)$$

Zakon promene struje kroz zavojnicu je:

$$i_L(t) = \frac{V}{R_1 \parallel R_2} - \frac{V}{R_2} \cdot e^{-\gamma t} \quad (1.8.9)$$

Sa slike 1.8.1 se vidi da je:

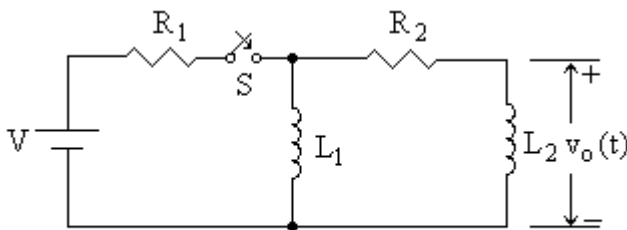
$$i_L(t) = i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) \quad (1.8.10)$$

$$R_1 i_{R_1}(t) = R_2 i_{R_2}(t) \quad (1.8.11)$$

Zakon promene struje kroz otpornik  $R_2$  je:

$$i_{R_2}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(t) = \frac{V}{R_2} \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\gamma t} \right) \quad (1.8.12)$$

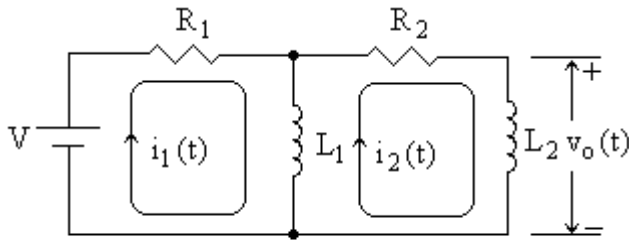
1.9) Odrediti zakon promene napona na zavojnici  $L_2$  u kolu sa slike 1.9 posle zatvaranja prekidača S.



Slika 1.9

Rešenje:

Posle zatvaranja prekidača S kolo sa slike 1.9 izgleda kao kolo na slici 1.9.1.



Slika 1.9.1

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 1.9.1 dobija se:

$$R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - L_1 \frac{di_2(t)}{dt} = V \quad (1.9.1)$$

$$-L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + (L_1 + L_2) \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = 0 \quad (1.9.2)$$

Sabiranjem jednačina (1.9.1) i (1.9.2) dobija se:

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = V \quad (1.9.3)$$

Diferenciranjem jednačina (1.9.3) dobija se:

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + R_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \quad (1.9.4)$$

Iz jednačine (1.9.2) sledi da je:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{L_1 + L_2}{L_1} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_2}{L_1} i_2(t) \quad (1.9.5)$$

Iz jednačina (1.9.4) i (1.9.5) dobija se sledeća diferencijalna jednačina:

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \left( R_2 + R_1 \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1} i_2(t) = 0 \quad (1.9.6)$$

Jednačina (1.9.6) je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda. Rešenje ove jednačine je oblika:

$$i_2(t) = Ke^{pt} \quad (1.9.7)$$

Zamenom jednačine (1.9.7) u jednačinu (1.9.6) dobija se:

$$L_2 p^2 + \left( R_2 + R_1 \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) p + \frac{R_1 R_2}{L_1} = 0 \quad (1.9.8)$$

Jednačina (1.9.8) je karakteristična jednačina. Koreni karakteristične jednačine su:

$$p_{1,2} = \frac{-\left( R_2 + R_1 \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) \pm \sqrt{\left( R_2 + R_1 \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right)^2 - 4 \frac{R_1 R_2}{L_1} L_2}}{2L_2} \quad (1.9.9)$$

odnosno:

$$p_{1,2} = -\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \quad (1.9.10)$$

Kako je:

$$\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} > \left( \frac{R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = \left( \frac{R_2}{2L_2} - \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 \geq 0$$

Oba rešenja karakteristične jednačine su realna i negativna:

$$p_1 = -\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right) + \sqrt{\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \quad (1.9.11)$$

$$p_2 = -\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right) - \sqrt{\left( \frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} \right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \quad (1.9.12)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (1.9.6) je:

$$i_2(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} \quad (1.9.13)$$

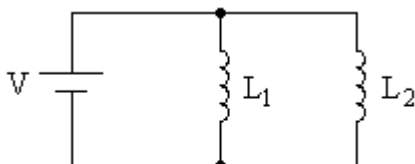
Konstante  $K_1$  i  $K_2$  određuju se iz početnih uslova. U trenutku zatvaranja prekidača S je:

$$i_1(t = 0_+) = i_2(t = 0_+) = 0 \quad (1.9.14)$$

Iz jednačina (1.9.13) i (1.9.14) sledi da je:

$$0 = K_1 + K_2 \quad (1.9.15)$$

U trenutku zatvaranja prekidača kolo sa slike 1.9 izgleda kao kolo na slici 1.9.2.



Slika 1.9.2

Sa slike 1.9.2 se vidi da je:

$$v_{L_1}(t = 0_+) = v_{L_2}(t = 0_+) = V \quad (1.9.16)$$

Diferenciranjem jednačine (1.9.13) dobija se:

$$\frac{di_2}{dt} = K_1 p_1 e^{p_1 t} + K_2 p_2 e^{p_2 t} \quad (1.9.17)$$

Iz jednačina (1.9.16) i (1.9.17) sledi da je:

$$\frac{V}{L_2} = K_1 p_1 + K_2 p_2 \quad (1.9.18)$$

Iz jednačina (1.9.15) i (1.9.18) dobijaju se konstante  $K_1$  i  $K_2$ :

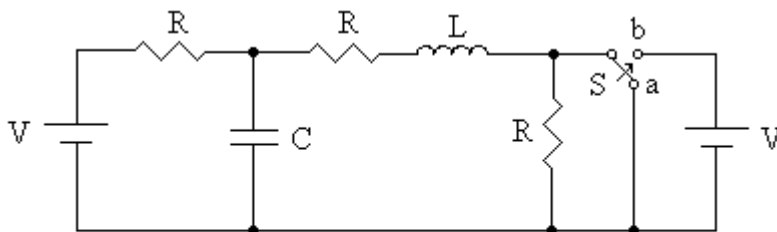
$$K_1 = \frac{V}{L_2(p_1 - p_2)} = \frac{V}{2L_2 \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}} \quad (1.9.19)$$

$$K_2 = -\frac{V}{L_2(p_1 - p_2)} = -\frac{V}{2L_2 \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}} \quad (1.9.20)$$

Zakon promene napona na zavojnici  $L_2$  je:

$$v_o(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{V}{2 \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}} \cdot (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \quad (1.9.21)$$

1.10) Odrediti zakon promene struje kroz zavojnicu  $L$  u kolu sa slike 1.10 posle prebacivanja prekidača iz položaja  $a$  u položaj  $b$ . Pretpostaviti da se pre prebacivanja prekidača u kolu uspostavio ustaljen režim. Između parametara kola postoji veza  $L = R^2 C$ .



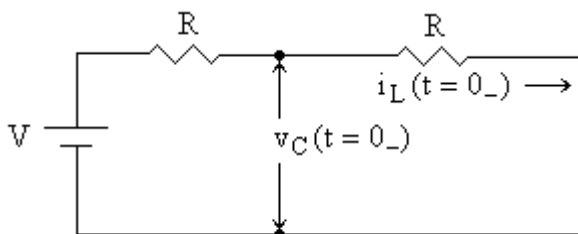
Slika 1.10

Rešenje:

Kako je pre prebacivanja prekidača  $S$  u kolu vladao ustaljen režim, kolo sa slike 1.10 izgleda kao kolo sa slike 1.10.1. Sa slike 1.10.1 se vidi da su struja kroz zavojnicu  $L$  i napon na kondenzatoru  $C$ , neposredno pre prebacivanja prekidača  $S$  iz položaja  $a$  u položaj  $b$ :

$$i_L(t = 0_-) = \frac{V}{2R} \quad (1.10.1)$$

$$v_C(t = 0_-) = Ri_L(t = 0_-) = \frac{V}{2} \quad (1.10.2)$$



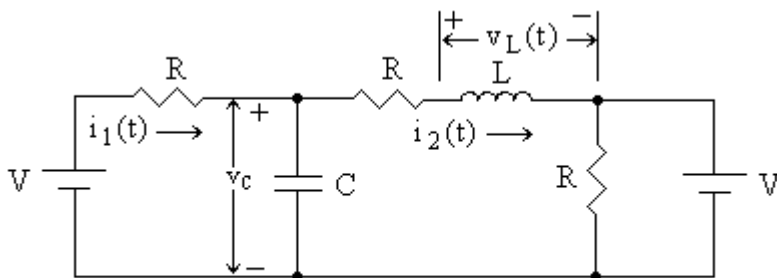
Slika 1.10.1

Prilikom prebacivanja prekidača S iz položaja a u položaj b struja kroz zavojnicu L i napon na kondenzatoru C se ne menjaju trenutno, odnosno:

$$i_L(t = 0_-) = i_L(t = 0_+) = \frac{V}{2R} \quad (1.10.3)$$

$$v_C(t = 0_-) = v_C(t = 0_+) = Ri_L(t = 0_-) = \frac{V}{2} \quad (1.10.4)$$

Posle prebacivanja prekidača S iz položaja a u položaj b kolo sa slike 1.10 izgleda kao kolo na slici 1.10.2:



Slika 1.10.2

Sa slike 1.10.2 se vidi da je:

$$V = Ri_1(t) + v_C(t) \quad (1.10.5)$$

$$-V = Ri_2(t) + v_L(t) - v_C(t) \quad (1.10.6)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \quad (1.10.7)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} \quad (1.10.8)$$

Iz jednačina (1.10.5) i (1.10.6) sledi da je:

$$Ri_1(t) + Ri_2(t) + v_L(t) = Ri_1(t) + Ri_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \quad (1.10.9)$$

odnosno:

$$i_1(t) + i_2(t) = -\frac{L}{R} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = -RC \frac{di_2(t)}{dt} \quad (1.10.10)$$

Jednačina (1.10.6) se može napisati u obliku:

$$-V = Ri_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \quad (1.10.11)$$

odnosno:

$$i_1(t) - i_2(t) = RC \frac{di_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} = RC \frac{di_2(t)}{dt} + RC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} \quad (1.10.12)$$

Iz jednačina (1.10.10) i (1.10.12) sledi da je:

$$2i_2(t) = -R^2C^2 \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} - 2RC \frac{di_2(t)}{dt} \quad (1.10.13)$$

odnosno:

$$R^2C^2 \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + 2RC \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = 0 \quad (1.10.13)$$



Rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima drugog reda (1.10.13) je oblika:

$$i_2(t) = Ke^{pt} \quad (1.10.14)$$

Zamenom jednačine (1.10.14) u jednačinu (1.10.13) dobija se:

$$R^2C^2p^2 + 2RCp + 1 = 0 \quad (1.10.15)$$

Koreni karakteristične jednačine (1.10.15) su:

$$p_{1,2} = \frac{-2RC \pm \sqrt{4R^2C^2 - 8R^2C^2}}{2R^2C^2} \quad (1.10.16)$$

odnosno:

$$p_1 = \frac{-1-j}{RC} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{-1+j}{RC}$$

Rešenje diferencijalne jednačine (1.10.14) je:

$$i_2(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left( K_1 \cos \frac{t}{RC} + K_2 \sin \frac{t}{RC} \right) \quad (1.10.17)$$

Konstante  $K_1$  i  $K_2$  određuju se iz početnih uslova. U trenutku prebacivanja prekidača S je:

$$i_2(t = 0_+) = \frac{V}{2R} = K_1 \quad (1.10.18)$$

$$v_L(t = 0_+) = L \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} = L \left( -\frac{1}{RC} K_1 + \frac{1}{RC} K_2 \right) = -V \quad (1.10.19)$$

Iz jednačina (1.10.18) i (1.10.19) sledi da je  $K_2 = -K_1$ . Zakon promene struje kroz zavojnicu L je:

$$i_2(t) = \frac{V}{2R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \left( \cos \frac{t}{RC} - \sin \frac{t}{RC} \right) \quad (1.10.20)$$

## 2. LAPLASOVE TRANSFORMACIJE

Laplasove transformacije zasnivaju se na integralima:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2)$$

gde su:

$L$  – operator direktne Laplasove transformacije

$L^{-1}$  – operator inverzne Laplasove transformacije

$s = \sigma + \omega$  – kompleksna promenjiva Laplasove transformacije

$F(s)$  – kompleksni lik funkcije  $f(t)$

$f(t)$  – original funkcije  $F(s)$

Integral (1) predstavlja direktnu Laplasovu transformaciju i prevodi vremensku funkciju  $f(t)$  u kompleksnu funkciju, dok integral (2) predstavlja inverznu Laplasovu transformaciju i prevodi kompleksnu funkciju  $F(s)$  u vremensku funkciju  $f(t)$ .

Egzistencija integrala (1) zavisi od oblika funkcije  $f(t)$  i vrednosti  $\sigma$ . Laplasova transformacija funkcije  $f(t)$  postoji samo za  $\sigma > \sigma_0$ . Veličina  $\sigma_0$

naziva se apcisa apsolutne konvergencije i predstavlja minimalnu (realnu i pozitivnu) vrednost  $\sigma = \sigma_0 \text{ const.}$  koja obezbeđuje konvergenciju integrala funkcije  $f(t)$ :

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty, \quad \sigma \geq \sigma_0 \quad (3)$$

Laplasove transformacije imaju veliku primenu u analizi i sintezi sistema, u rešavanju sistema diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, kao i u nalaženju prenosne funkcije sistema.

### **OSOBINE DIREKTNE LAPLASOVE TRANSFORMACIJE**

1. Teorema linearnosti

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s), \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

2. Teorema o izvodu originala (realno diferenciranje)

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0_+)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_+)$$

3. Teorema o integralu originala (realno integraljenje)

$$L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_0^{0_+} f(t) dt}{s}$$

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

4. Teorema o izvodu kompleksnog lika (kompleksno diferenciranje)

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

5. Kompleksno integraljenje

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$$

6. Teorema kašnjenja (realna translacija)

$$L[f(t-a)] = e^{-as}F(s), \quad a > 0$$

7. Teorema pomeranja (kompleksna translacija)

$$L[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s + \alpha)$$

8. Teorema sličnosti

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

9. Teorema o početnoj vrednosti

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

10. Teorema o konačnoj vrednosti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

11. Konvolucija originala

Ako je funkcija  $f(t)$  data konvolucionim integralom

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

tada je:

$$F(s) = L[f(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

## LAPLASOVE TRANSFORMACIJE OSNOVNIH FUNKCIJA

### 1. Heaviside – ova funkcija

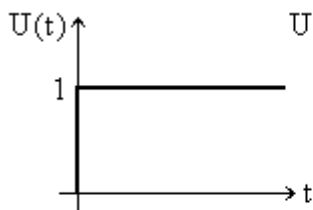
Ova funkcija je poznata i pod imenom jedinična odskočna funkcija.

Data je relacijom:

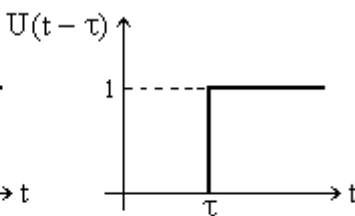
$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Funkcija  $U(t)$  ima prekid u tački  $t = 0$  (slika 1). Ako prekid postoji u tački  $t = \tau$  (slika 2), tada funkcija glasi:

$$U(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$



Slika 1



Slika 2

Laplasova transformacija Heaviside – ove funkcije je:

$$L[U(t)] = \frac{1}{s}$$

$$L[U(t - \tau)] = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

2. Dirac – ova delta funkcija

Ova funkcija je poznata i pod imenom jedinična impulsna funkcija.

Data je relacijom:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Pri tome je:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Laplasova transformacija Dirac – ove delta funkcije je:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

3. Nagibna funkcija

Ova funkcija je data relacijom:

$$f(t) = atU(t)$$

ili, s obzirom na definiciju funkcije  $U(t)$

$$f(t) = at, \quad t \geq 0$$

Laplasova transformacija nagibne funkcije je:

$$L[at] = \frac{a}{s^2}$$

4. Eksponencijalne funkcije

Za opadajuću eksponencijalnu funkciju datu relacijom:

$$f(t) = e^{-\alpha t} U(t), \quad \alpha > 0$$

Laplasova transformacija je:

$$L[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s + \alpha}$$

Za rastuću eksponencijalnu funkciju datu relacijom:

$$f(t) = (1 - e^{-\alpha t})U(t)$$

Laplasova transformacija je:

$$L[1 - e^{-\alpha t}] = \frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$$

#### 5. Prostoperiodične funkcije

Za sinusnu i kosinusnu funkciju

$$f_1(t) = U(t)\sin(\beta t)$$

$$f_2(t) = U(t)\cos(\beta t)$$

Laplasova transformacija je:

$$L[\sin(\beta t)] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$L[\cos(\beta t)] = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

### INVERZNA LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

Inverzna Laplasova transformacija zasniva se na integralu (2). Integraljenje se vrši duž prave  $R_\sigma(s) = \sigma$  izabrane tako da se svi polovi funkcije  $F(s)$  nalaze levo od nje. U svim slučajevima od interesa funkcija  $F(s)$  se može prikazati u obliku racionalne razlomljene funkcije, odnosno:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4)$$

gde su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi po  $s$ , pri čemu je stepen polinoma u brojitelju manji ili jednak stepenu polinoma u imenitelju ( $m \leq n$ ). Nule polinom  $P(s)$

i  $Q(s)$  nazivaju se nule i polovi funkcije  $F(s)$ . Pošto su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi sa realnim koeficijentima, njihove nule, odnosno nule i polovi funkcije  $F(s)$  mogu biti ili realni, ili u konjugovano kompleksnim parovima. Tada se inverzna Laplasova transformacija može naći razvojem funkcije  $F(s)$  u parcijalne razlomke (Hevisajdov razvoj) ili primenom Košijeve teoreme ostataka. U mnogim slučajevima inverzna Laplasova transformacija može se naći u tablicama Laplasovih transformacionih parova.

### Metoda parcijalnih razlomaka

Funkcija (4) može se napisati u obliku:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{A(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

Mogući su sledeći slučajevi:

**a) koreni su međusobno različiti:**

Funkcija  $F(s)$  može se tada prikazati u obliku:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n} = \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{s-s_k}$$

gde su  $K_1, K_2, \dots, K_n$  konstantni koeficijenti. Množenjem jednačine sa  $(s-s_k)$  i prelaženjem na graničnu vrednost dobija se:

$$\lim_{s \rightarrow s_k} (s-s_k) \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{s-s_k} = \lim_{s \rightarrow s_k} (s-s_k) \frac{P(s)}{Q(s)}$$

odnosno:

$$K_k = \left[ (s-s_k) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_k}$$



Inverzna Laplasova transformacija funkcije  $F(s)$  određuje se na taj način što se za svaki član parcijalnog razlomka odredi inverzna transformacija:

$$f(t) = L^{-1} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{s - s_k} \right] = \sum_{k=1}^n K_k e^{s_k t}$$

Ako su neki koreni kompleksni, oni se javljaju u konjugovanim parovima. Neka su  $s_k = -\alpha_k + j\beta_k$  i  $s_{k+1} = s_k^* = -\alpha_k - j\beta_k$ . Tada se funkcija (4) može prikazati u obliku:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - s_k)(s - s_k^*)Q_1(s)} = \frac{K_k}{s - s_k} + \frac{K_{k+1}}{s - s_k^*} + \frac{P(s)}{Q_1(s)}$$

Za koeficijente  $K_k$  i  $K_{k+1}$  dobija se:

$$K_k = \left[ (s - s_k) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_k} = \frac{P(s_k)}{(s_k - s_k^*)Q_1(s_k)} = \frac{P(s_k)}{j2\beta_k Q_1(s_k)}$$

$$K_{k+1} = \left[ (s - s_k^*) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_k^*} = \frac{P(s_k^*)}{(s_k^* - s_k)Q_1(s_k^*)} = -\frac{P(s_k^*)}{j2\beta_k Q_1(s_k^*)}$$

Kompleksni koeficijenti  $K_k$  i  $K_{k+1}$  su konjugovani:

$$K_k = x_k + jy_k = |K_k| e^{j\varphi_k}$$

$$K_{k+1} = K_k^* = x_k - jy_k = |K_k| e^{-j\varphi_k}$$

gde je:

$$\varphi_k = \arctg \frac{y_k}{x_k}.$$

Pri nalaženju inverzne Laplasove transformacije funkcije  $F(s)$  članovi zbira sa kompleksnim korenima se objedinjuju. Tada je:

$$L^{-1} \left[ \frac{K_k}{s-s_k} + \frac{K_k^*}{s-s_k^*} \right] = |K_k| e^{-\alpha_k t} e^{j(\beta_k t + \varphi_k)} + |K_k| e^{-\alpha_k t} e^{-j(\beta_k t + \varphi_k)} =$$

$$= 2|K_k| e^{-\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k)$$

### b) koreni su višestruki

Kada se koreni polinoma u imenitelju funkcije (4) ponavljaju, ona se može napisati u obliku:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{A(s-s_1)^{m_1} (s-s_2)^{m_2} \dots (s-s_n)^{m_n}}$$

Svaki koren  $s_k$  multipliciteta  $m_k$  može se napisati u obliku:

$$\frac{K_{k1}}{(s-s_k)^{m_k}} + \frac{K_{k2}}{(s-s_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{K_{km_k}}{s-s_k} = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(s-s_k)^{m_k-j+1}}$$

odnosno za celu funkciju  $F(s)$  dobija se:

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(s-s_k)^{m_k-j+1}}$$

Koeficijenti korena  $s_k$  određuju se tako što se prethodna jednačina pomnoži sa  $(s-s_k)^{m_k}$  i stavi  $s = s_k$ :

$$\left[ (s-s_k)^{m_k} F(s) \right]_{s=s_k} = \left[ K_{k1} + K_{k2}(s-s_k) + \dots + K_{km_k} (s-s_k)^{m_k-1} \right]_{s=s_k} = K_{k1}$$

Diferenciranjem ovog izraza po  $s$ , pre prelaska na graničnu vrednost, i smenom  $s = s_k$ , dobija se:

$$\left[ \frac{d}{ds} (s-s_k)^{m_k} F(s) \right]_{s=s_k} = \left[ K_{k2} + 2K_{k3}(s-s_k) + \dots \right]_{s=s_k} = K_{k2}$$

Za nalaženje opšteg koeficijenta  $K_{kj}$  diferenciranje treba produžiti do  $(m_k - 1)$  – og izvoda, a zatim staviti  $s = s_k$ . Tada je:

$$K_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (s - s_k)^{m_k} F(s) \right]_{s=s_k}, \quad j = 1, 2, \dots, m_k$$

Sa poznatim koeficijentima  $K_{kj}$ , inverzna transformacija funkcije postaje:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(m_k - j)!} t^{m_k - j} e^{s_k t}$$

TABLICA LAPLASOVIIH TRANSFORMACIONIH PAROVA

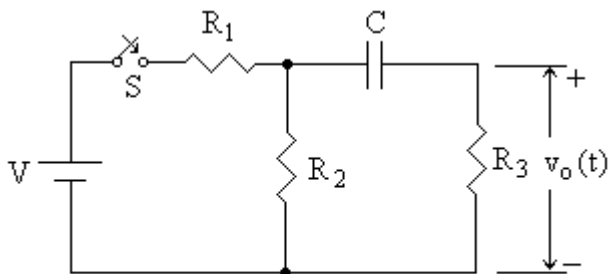
$N_o$	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}$
4	$\frac{s^n}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{n!(-\alpha)^k}{(n-k)!(k!)^2} t^k$
5	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
6	$\frac{s + a_o}{(s + \alpha)(s + \gamma)}$	$\frac{(a_o - \alpha)e^{-\alpha t} - (a_o - \gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
7	$\frac{s + a_o}{(s + \alpha)^2}$	$[(a_o - \alpha)t + 1]e^{-\alpha t}$
8	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \gamma)(s + \delta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\delta - \gamma)} + \frac{e^{-\delta t}}{(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)}$
9	$\frac{1}{(s + \alpha)s^2}$	$\frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2}$
10	$\frac{s + a_o}{(s + \alpha)(s + \gamma)(s + \delta)}$	$\frac{(a_o - \alpha)e^{-\alpha t}}{(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)} + \frac{(a_o - \gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\delta - \gamma)} + \frac{(a_o - \delta)e^{-\delta t}}{(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)}$
11	$\frac{s + a_o}{(s + \alpha)^2 s}$	$\frac{a_o}{\alpha^2} + \left(\frac{\alpha - a_o}{\alpha} t - \frac{a_o}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$
12	$\frac{1}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sin(\beta t)$

**LAPLASOVE TRANSFORMACIJE**

---

13	$\frac{1}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta t)$
14	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos(\beta t)$
15	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\text{ch}(\beta t)$
16	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$
17	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$
20	$e^{-as}$	$\delta(t - a)$
21	$\frac{e^{-as}}{s}$	$U(t - a)$
22	$\frac{e^{-as}}{s^2}$	$(t - a)U(t - a)$
23	$\frac{e^{-as}}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha(t-a)}U(t - a)$
24	$\frac{e^{-as}}{(s + \alpha)^2}$	$(t - a)e^{-\alpha(t-a)}U(t - a)$
25	$\frac{e^{-as}}{(s + \alpha)(s + \gamma)}$	$\left[ \frac{e^{-\alpha(t-a)} - e^{-\gamma(t-a)}}{\gamma - \alpha} \right] U(t - a)$
26	$\frac{1 - e^{-as}}{s}$	$U(t) - U(t - a)$
27	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$	$U(t - a) - U(t - b)$
28	$\frac{(s + a)e^{-as}}{as^2}$	$(t - \frac{1}{a} - a)U(t - a)$

2.1) Odrediti zakon promene napona na otporniku  $R_3$  u kolu sa slike 2.1 posle zatvaranja prekidača  $S$ . Napon na kondenzatoru u trenutku zatvaranja prekidača  $S$  je  $v_C(t = 0_+) = V_C = \text{const}$ .



Slika 2.1

Rešenje:

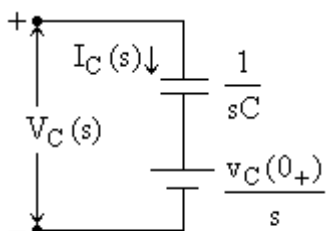
Između napona na kondenzatoru i struje koja kroz njega protiče postoji veza:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \quad (2.1.1)$$

Primenom teoreme o integralu originala jednačina (2.1.1) postaje:

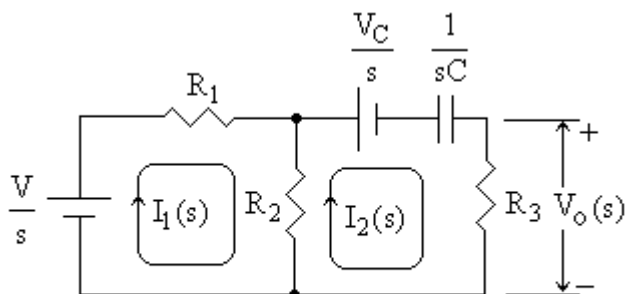
$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{\int^{0+} i_C(t) dt}{s} = Z_C(s) I_C(s) + \frac{v_C(0_+)}{s} \quad (2.1.2)$$

gde je  $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ . Iz jednačine (2.1.2) sledi da se kondenzator sa početnim naponom  $v_C(t = 0_+)$  može prikazati kolom u kome je serijski sa kondenzatorom vezan idealan naponski izvor  $\frac{v_C(t = 0_+)}{s}$ , koji uzima u obzir početne uslove (slika 2.1.1).



Slika 2.1.1

Posle zatvaranja prekidača S kolo sa slike 2.1 izgleda kao kolo na slici 2.1.2.



Slika 2.1.2

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 2.1.2 dobija se:

$$\frac{V}{s} = (R_1 + R_2)I_1(s) - R_2I_2(s) \quad (2.1.3)$$

$$-\frac{V_C}{s} = -R_2I_1(s) + \left( R_2 + R_3 + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) \quad (2.1.4)$$

Eliminacijom struje  $I_1(s)$  iz jednačina (2.1.3) i (2.1.4) dobija se:

$$R_2 \frac{V}{s} - (R_1 + R_2) \frac{V_C}{s} = \left[ (R_1 + R_2) \left( R_2 + R_3 + \frac{1}{sC} \right) - R_2^2 \right] I_2(s) \quad (2.1.5)$$

odnosno:

$$I_2(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V - V_C}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.1.6)$$

gde je  $\tau = \frac{C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 + R_2}$  vremenska konstanta kola.

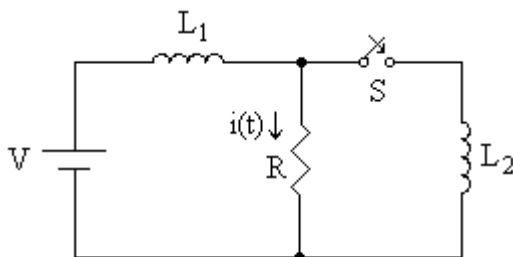
Zakon promene napona na otporniku  $R_3$  je:

$$V_o(s) = R_3 I_2(s) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V - V_C}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.1.7)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije zakon promene napona  $v_o(t)$  je:

$$v_o(t) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} V - V_C \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.1.8)$$

2.2) Odrediti zakon promene struje kroz otpornik  $R$  u kolu sa slike 2.2 posle zatvaranja prekidača  $S$ . Pretpostaviti da je pre zatvaranja prekidača u kolu vladao ustaljen režim.



Slika 2.2



Rešenje:

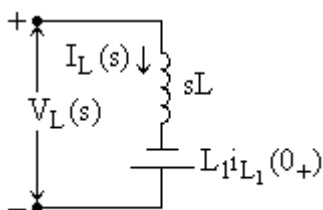
Između napona na induktivitetu i struje koja kroz njega protiče postoji veza:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.2.1)$$

Primenom teoreme o izvodu originala jednačina (2.2.1) postaje:

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_+) = Z_L(s)I_L(s) - Li_L(0_+) \quad (2.2.2)$$

gde je  $Z_L(s) = sL$ . Iz jednačine (2.2.2) sledi da se induktivitet sa početnom strujom  $i_L(0_+)$  može prikazati kolom u kome je serijski sa zavojnicom vezan idealan naponski izvor  $Li_L(0_+)$ , koji uzima u obzir početne uslove (slika 2.2.1).



Slika 2.2.1

Kako je pre otvaranja prekidača S u kolu vladao ustaljen režim, struja kroz zavojnicu  $L_1$  neposredno pre otvaranja prekidača je:

$$i_{L_1}(t = 0_-) = \frac{V}{R} \quad (2.2.3)$$

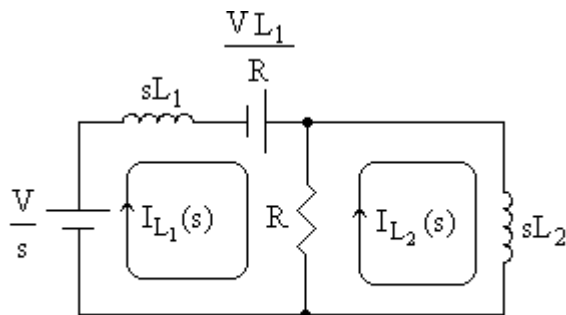
Neposredno po otvaranju prekidača struja kroz zavojnicu  $L_1$  se ne menja, odnosno:

$$i_{L_1}(t = 0_+) = i_{L_1}(t = 0_-) = \frac{V}{R} \quad (2.2.4)$$

Struja kroz zavojnicu  $L_2$  u trenutku zatvaranja prekidača S je:

$$i_{L_2}(t = 0_+) = 0 \quad (2.2.5)$$

Posle zatvaranja prekidača S kolo sa slike 2.2 izgleda kao kolo na slici 2.2.2.



Slika 2.2.2

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 2.2.2 dobija se:

$$\frac{V}{s} + \frac{VL_1}{R} = (sL_1 + R)I_{L_1}(s) - RI_{L_2}(s) \quad (2.2.6)$$

$$0 = -RI_{L_1}(s) + (sL_2 + R)I_{L_2}(s) \quad (2.2.7)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina Kramerovim pravilom dobija se:

$$\Delta = \begin{vmatrix} sL_1 + R & -R \\ -R & sL_2 + R \end{vmatrix} = (sL_1 + R)(sL_2 + R) - R^2 = sL_1L_2 \left( s + \frac{L_1 + L_2}{L_1L_2} R \right)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{V}{s} + \frac{VL_1}{R} & -R \\ 0 & sL_2 + R \end{vmatrix} = \left[ \frac{V}{s} + \frac{VL_1}{R} \right] (sL_2 + R)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} sL_1 + R & \frac{V}{s} + \frac{VL_1}{R} \\ -R & 0 \end{vmatrix} = \left[ \frac{V}{s} + \frac{VL_1}{R} \right] R$$

Struja kroz otpornik R je:

$$I(s) = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta} = \frac{V}{L_1} \cdot \frac{1}{s \left( s + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R \right)} + \frac{V L_1}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R} \quad (2.2.8)$$

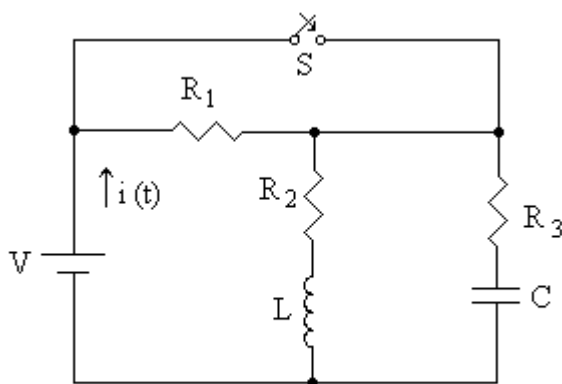
Zakon promene struje  $i(t)$  je:

$$i(t) = L^{-1}[I(s)] = \frac{V}{L_1} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R t}}{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R} + \frac{V}{R} e^{-\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R t} \quad (2.2.9)$$

odnosno:

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot \frac{L_2}{L_1 + L_2} \left( 1 + \frac{L_1}{L_2} e^{-\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} R t} \right) \quad (2.2.10)$$

2.3) Odrediti zakon promene struje kroz generator V u kola sa slike 2.3 posle zatvaranja prekidača S. Pretpostaviti da je pre zatvaranja prekidača u kolu vladao ustaljen režim.



Slika 2.3

Rešenje:

Kako je pre zatvaranja prekidača S u kolu vladao ustaljen režim, struja ne teče kroz kondenzator C, a pad napona na zavojnici L je nula. Zato je:

$$i_L(t = 0_-) = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (2.3.1)$$

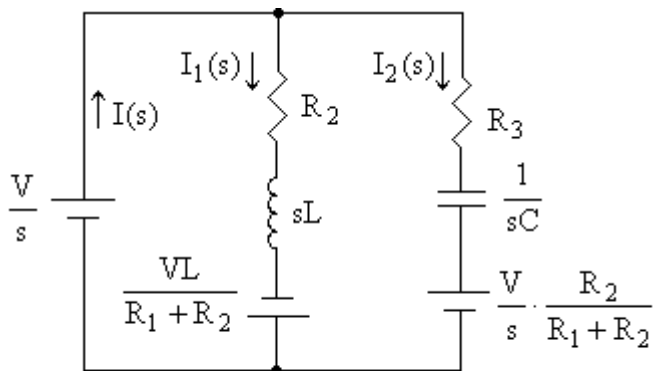
$$v_C(t = 0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (2.3.2)$$

Prilikom zatvaranja prekidača struja kroz zavojnici i napon na kondenzator se ne menjaju trenutno, odnosno:

$$i_L(t = 0_-) = i_L(t = 0_+) = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (2.3.3)$$

$$v_C(t = 0_-) = v_C(t = 0_+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (2.3.4)$$

Posle zatvaranja prekidača S kolo sa slike 2.3 izgleda kao na slici 2.3.1.



Slika 2.3.1.

Sa slike 2.3.1 se vidi da je:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) \quad (2.3.5)$$

gde su:

$$I_1(s) = \frac{\frac{V}{s} + \frac{VL}{R_1 + R_2}}{R_2 + sL} = \frac{V}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{R_1 + R_2}{L}}{s \left( s + \frac{R_2}{L} \right)} = \quad (2.3.6)$$

$$= \frac{V}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{VR_1}{(R_1 + R_2)L} \cdot \frac{1}{s \left( s + \frac{R_2}{L} \right)}$$

$$I_2(s) = \frac{\frac{V}{s} - \frac{V}{s} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_1 V}{R_3(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{R_3 C}} \quad (2.3.7)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se:

$$i_1(t) = L^{-1}[I_1(s)] = \frac{V}{R_1 + R_2} \left[ 1 + \frac{R_1}{L} \cdot \frac{L}{R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_2}{L}t} \right) \right] = \quad (2.3.8)$$

$$= \frac{V}{R_1 + R_2} \left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_2}{L}t} \right) \right]$$

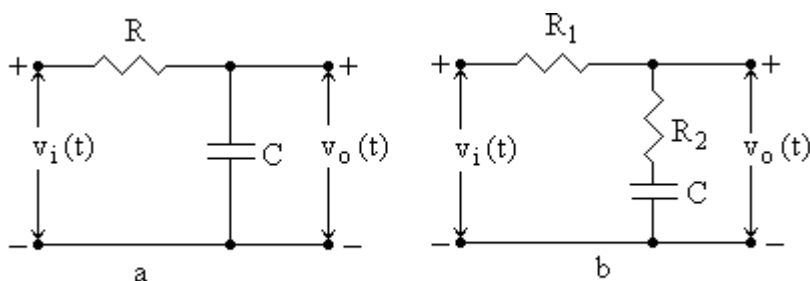
$$i_2(t) = L^{-1}[I_2(s)] = \frac{VR_1}{R_3(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{R_3 C}} \quad (2.3.9)$$

Zakon promene struje kroz generator V je:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{V}{R_1 + R_2} \left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_2}{L}t} \right) + \frac{R_1}{R_3} e^{-\frac{1}{R_3 C}t} \right] \quad (2.3.10)$$

2.4) Za RC filtere propusnike niskih učestanosti sa slike 2.4 izračunati:

- prenosnu funkciju
- amplitudno frekventnu karakteristiku
- gornju graničnu frekvenciju i nacrtati amplitudno frekventnu karakteristiku



Slika 2.4

Rešenje:

Prenosna funkcija je definisana odnosom kompleksnih funkcija odziva i pobude pri nultim početnim uslovima. Ona je potpuno određena strukturom sistema i parametrima koji sačinjavaju sistem.

a) Prenosna funkcija kola sa slike 2.4.a je:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_C(s)}{R + Z_C(s)} \quad (2.4.1)$$

gde je  $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ . Prenosna funkcija je:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_o}{s + \omega_o}, \quad \omega_o = \frac{1}{RC} \quad (2.4.2)$$

Smenom  $s = j\omega$  jednačina (2.4.2) postaje:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (2.4.3)$$

b) amplitudno frekventna karakteristika kola sa slike 2.4.a je:

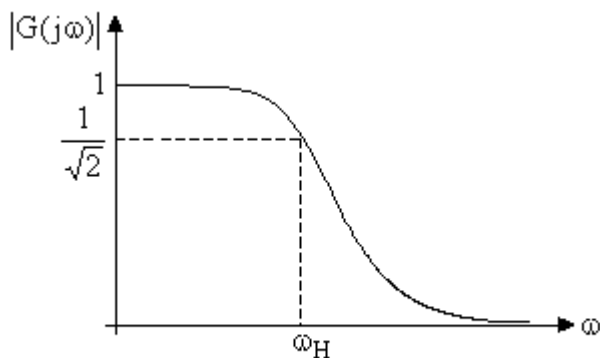
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (2.4.4)$$

pri čemu je:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0$  i  $|G(j\omega)|_{\omega=0} = 1$ .

c) Grafik amplitudno frekventne karakteristike prikazan je na slici 2.4.1.

Frekvencija  $\omega = \omega_H$  na kojoj je  $|G(j\omega_H)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$  naziva se gornja

granična frekvencija. Iz jednačine (2.4.4) sledi da je  $\omega_H = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ .



Slika 2.4.1

a) Prenosna funkcija kola sa slike 2.4.b je:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + Z_C(s)}{R_1 + R_2 + Z_C(s)} \quad (2.4.5)$$

odnosno:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{CR_2}}{s + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}} = a \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (2.4.6)$$

gde su:  $\omega_z = \frac{1}{CR_2}$ ,  $\omega_p = \frac{1}{C(R_1 + R_2)}$ ,  $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\omega_p}{\omega_z} < 1$

Smenom  $s = j\omega$  jednačina (2.4.6) postaje:

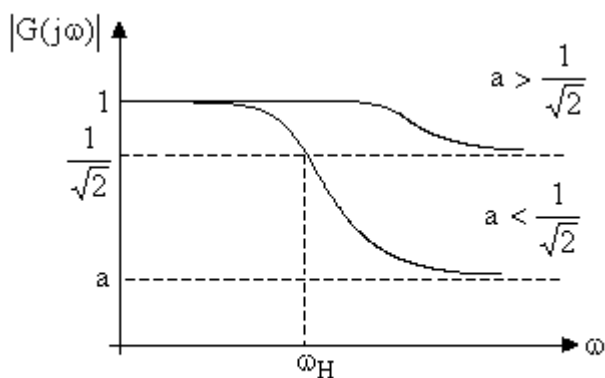
$$G(j\omega) = a \frac{j\omega + \omega_z}{j\omega + \omega_p} \quad (2.4.7)$$

b) Amplitudno frekventna karakteristika kola sa slike 2.4.b je:

$$|G(j\omega)| = a \sqrt{\frac{\omega^2 + \omega_z^2}{\omega^2 + \omega_p^2}} \quad (2.4.8)$$

pri čemu je:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = a$ ,  $|G(j\omega)|_{\omega=0} = 1$ .

c) Grafik amplitudno frekventne karakteristike prikazan je na slici 2.4.2.



Slika 2.4.2



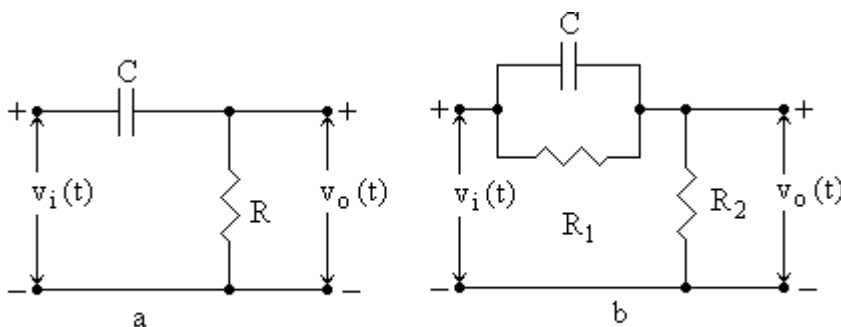
Gornja granična frekvencija  $\omega_H$  se određuje iz uslova da je:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega_H^2 a^2 + \omega_p^2}{\omega_H^2 + \omega_p^2}}, \text{ odnosno } \omega_H = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-2a^2}}. \text{ Postoji samo}$$

$$\text{za } a < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.5) Za RC filtere propusnike visokih učestanosti sa slike 2.5 izračunati:

- prenosnu funkciju
- amplitudno frekventnu karakteristiku
- donju graničnu frekvenciju i nacrtati amplitudno frekventnu karakteristiku



Slika 2.5

Rešenje:

a) Prenosna funkcija kola sa slike 2.5.a je:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + Z_C(s)} \quad (2.5.1)$$

gde je  $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ . Prenosna funkcija je:

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{s + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (2.5.2)$$

Smenom  $s = j\omega$  jednačina (2.5.2) postaje:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} \quad (2.5.3)$$

b) amplitudno frekventna karakteristika kola sa slike 2.5.a je:

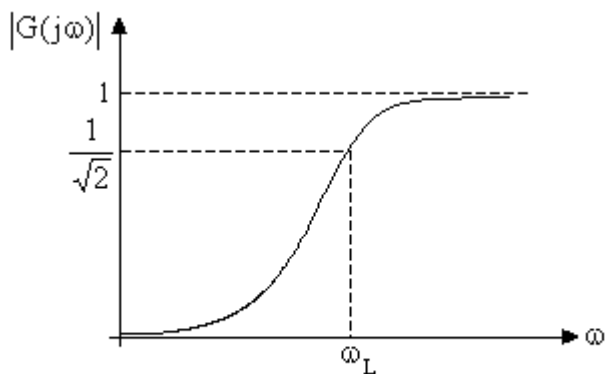
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (2.5.4)$$

pri čemu je:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 1$  i  $|G(j\omega)|_{\omega=0} = 0$ .

c) Grafik amplitudno frekventne karakteristike prikazan je na slici 2.5.1.

Frekvencija  $\omega = \omega_L$  na kojoj je  $|G(j\omega_L)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$  naziva se donja

granična frekvencija. Iz jednačine (2.5.4) sledi da je  $\omega_L = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ .



Slika 2.5.1

a) Prenosna funkcija kola sa slike 2.5.b je:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{Z_C(s) \parallel R_1 + R_2} \quad (2.5.5)$$

odnosno:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 \parallel \frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + sCR_1} + R_2} = \frac{s + \frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_1R_2C}} = \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (2.5.6)$$

gde su:  $\omega_z = \frac{1}{R_1C}$ ,  $\omega_p = \frac{1}{R_1R_2C}$ ,  $\frac{\omega_z}{\omega_p} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a < 1$

Smenom  $s = j\omega$  jednačina (2.5.6) postaje:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \omega_z}{j\omega + \omega_p} \quad (2.5.7)$$

b) Amplitudno frekventa karakteristika kola sa slike 2.5.b je:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 + \omega_z^2}{\omega^2 + \omega_p^2}} \quad (2.5.8)$$

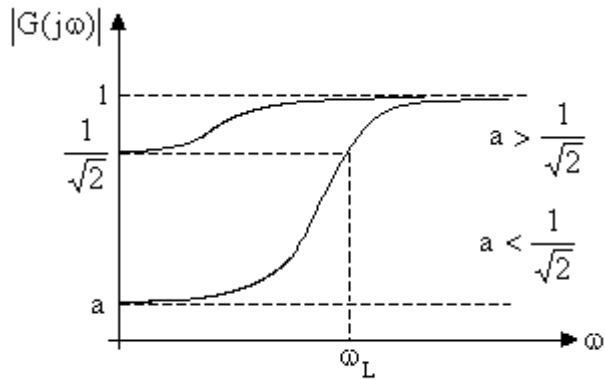
pri čemu je:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 1$ ,  $|G(j\omega)|_{\omega=0} = a$ .

c) Grafik amplitudno frekventne karakteristike prikazan je na slici 2.5.2.

Donja granična frekvencija  $\omega_L$  se određuje iz uslova da je:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega_L^2 + \omega_z^2}{\omega_L^2 + \omega_p^2}} = \sqrt{\frac{\omega_L^2 + a^2\omega_p^2}{\omega_L^2 + \omega_p^2}}, \text{ tj. za } \omega_L = \omega_p \sqrt{1 - 2a^2}.$$

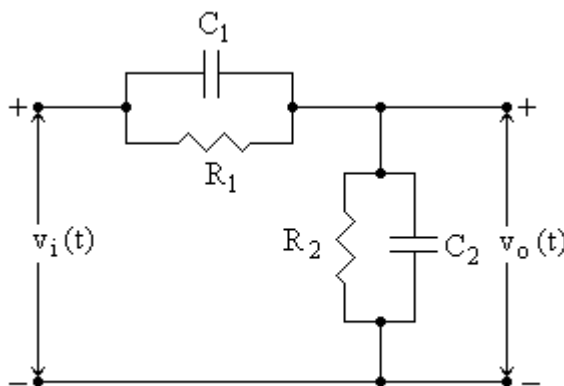
Postoji samo za  $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .



Slika 2.5.2

2.6) Za naponski delitelj sa slike 2.6:

- a) Izračunati prenosnu funkciju
- b) Izračunati i nacrtati amplitudno frekventnu karakteristiku za:
  - i)  $R_1 C_1 < R_2 C_2$
  - ii)  $R_1 C_1 > R_2 C_2$
  - iii)  $R_1 C_1 = R_2 C_2$



Slika 2.6

Rešenje:

a) Prenosna funkcija kola sa slike 2.6 je:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (2.6.1)$$

gde su:

$$Z_1(s) = R_1 \parallel \frac{1}{sC_1} = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1}$$

$$Z_2(s) = R_2 \parallel \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2}$$

Prenosna funkcija je:

$$G(s) = \frac{\frac{R_2}{1 + sR_2C_2}}{\frac{R_1}{1 + sR_1C_1} + \frac{R_2}{1 + sR_2C_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + sR_1C_1}{1 + s \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)} \quad (2.6.2)$$

odnosno:

$$G(s) = a \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.6.3)$$

gde su:  $\omega_z = \frac{1}{R_1C_1}$ ,  $\omega_p = \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)}$ ,  $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Smenom  $s = j\omega$  jednačina (2.6.3) postaje:

$$G(j\omega) = a \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_z}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}} \quad (2.6.4)$$

b) Amplitudno frekventna karakteristika kola sa slike 2.6 je:

$$|G(j\omega)| = a \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}} \quad (2.6.5)$$

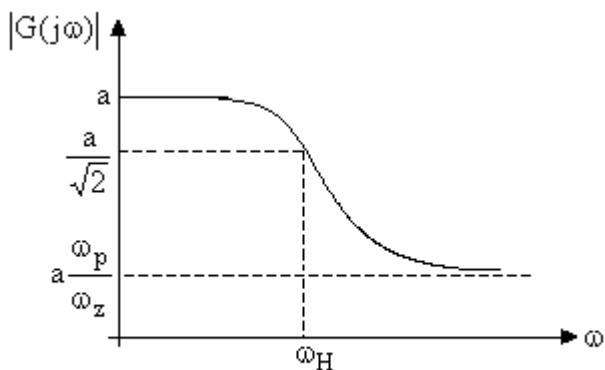
i) Za  $R_1C_1 < R_2C_2$  sledi da je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)} &= \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1+R_1R_2C_2} < \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1+R_1R_1C_1} = \\ &= \frac{R_1+R_2}{R_1C_1(R_1+R_2)} = \frac{1}{R_1C_1} \end{aligned}$$

odnosno  $\omega_p < \omega_z$ .

Grafik amplitudno frekventna karakteristika je prikazana na slici 2.6.1.

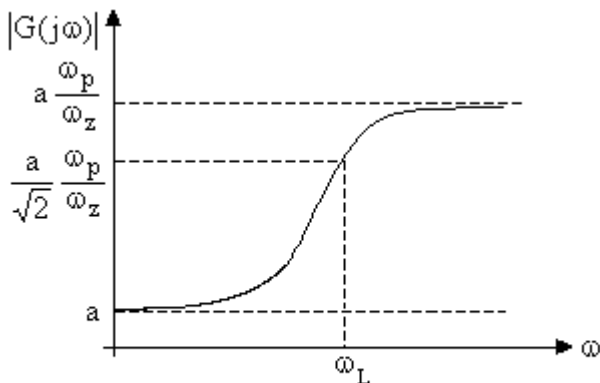
Iz jednačine (2.6.5) sledi da je  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = a \frac{\omega_p}{\omega_z} < a$  i  $|G(j\omega)|_{\omega=0} = a$ .



Slika 2.6.1

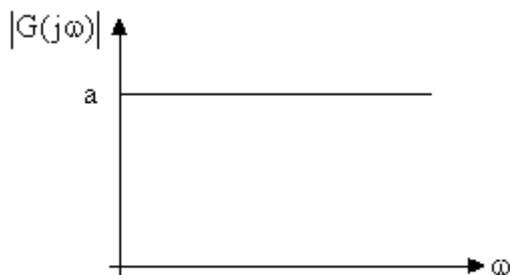
ii) Za  $R_1C_1 > R_2C_2$  sledi da je  $\omega_p > \omega_z$ . Grafik amplitudno frekventna karakteristika je prikazana na slici 2.6.2. Iz jednačine (2.6.4) sledi da je:

$$|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = a \frac{\omega_p}{\omega_z} > a \text{ i } |G(j\omega)|_{\omega=0} = a$$



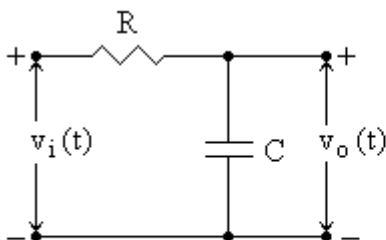
Slika 2.6.2

iii) Za  $R_1C_1 = R_2C_2$  iz jednačine (2.6.4) sledi da je  $|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a$ . Grafik amplitudno frekventna karakteristika je prikazana na slici 2.6.3.

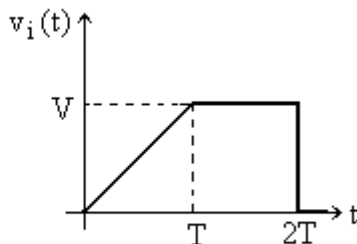


Slika 2.6.3

2.7) Odrediti zakon promene izlaznog napona RC kola sa slike 2.7.1 ako se od trenutka  $t = 0$  pobuđuje naponom prikazanim na slici 2.7.2.



Slika 2.7.1



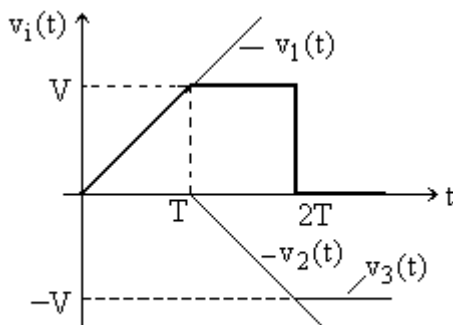
Slika 2.7.2

Rešenje:

Ulazni napon je definisan na sledeći način:

$$v_i(t) = \begin{cases} at & 0 \leq t < T \\ V & T \leq t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases} \quad a = \frac{V}{T} \quad (2.7.1)$$

Ulazni napon može se predstaviti superpozicijom tri međusobno nezavisna napona prikazanim na slici 2.7.3.



Slika 2.7.3.



gde su:

$$v_1(t) = atU(t) \quad (2.7.2)$$

$$v_2(t) = -a(t - T)U(t - T) \quad (2.7.3)$$

$$v_3(t) = -VU(t - 2T) \quad (2.7.4)$$

Ulazni napon je:

$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = \quad (2.7.5)$$

$$= atU(t) - a(t - T)U(t - T) - VU(t - 2T)$$

Primenom direktne Laplasove transformacije jednačina (2.7.5) postaje:

$$V_i(s) = L[v_i(t)] = \frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2} e^{-sT} - \frac{aT}{s} e^{-2sT} \quad (2.7.6)$$

Prenosna funkcija RC kola sa slike 2.7.1 je:

$$G(s) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}, \quad \tau = RC \quad (2.7.7)$$

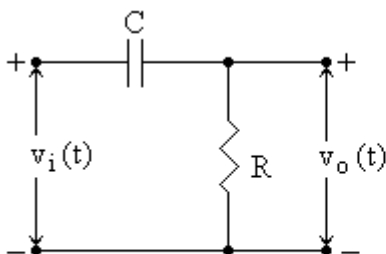
Izlazni napon je:

$$V_o(s) = G(s)V_i(s) = \frac{1}{\tau \left( s + \frac{1}{\tau} \right)} \left( \frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2} e^{-sT} - \frac{aT}{s} e^{-2sT} \right) \quad (2.7.8)$$

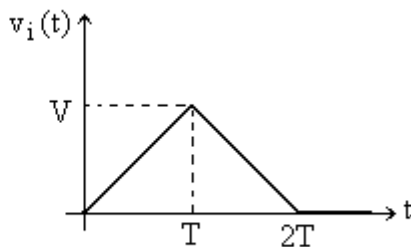
Zakon promene izlaznog napona sa vremenom je:

$$v_o(t) = at \left( e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1 \right) U(t) - at \left( e^{-\frac{t-T}{\tau}} + \frac{t-T}{\tau} - 1 \right) U(t - T) - aT \left( 1 - e^{-\frac{t-2T}{\tau}} \right) U(t - 2T) \quad (2.7.9)$$

2.8) Odrediti zakon promene izlaznog napona CR kola sa slike 2.8.1 ako se od trenutka  $t = 0$  pobuđuje naponom prikazanim na slici 2.8.2.



Slika 2.8.1



Slika 2.8.2

Rešenje:

Ulazni napon je dat superpozicijom dva međusobno nezavisna napona:

$$v_i(t) = v_{i1}(t) + v_{i2}(t) \quad (2.8.1)$$

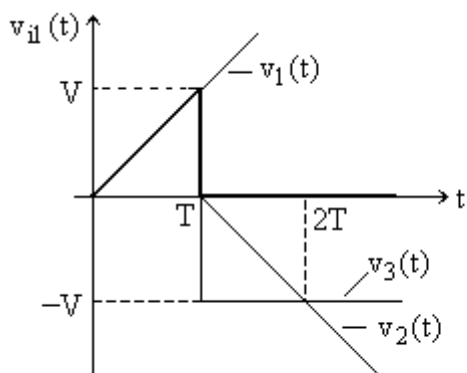
gde su:

$$v_{i1}(t) = \begin{cases} at & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad a = \frac{V}{T} \quad (2.8.2)$$

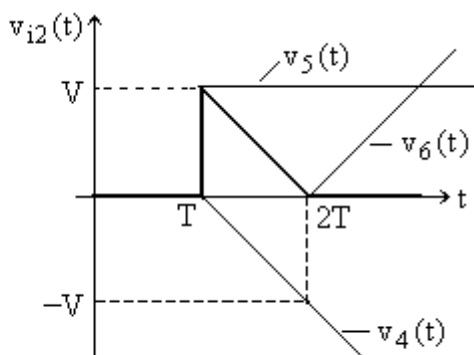
$$v_{i2}(t) = \begin{cases} -a(t-T) + V & T \leq t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases} \quad a = \frac{V}{T} \quad (2.8.3)$$

Napon  $v_{i1}(t)$  može se predstaviti superpozicijom tri međusobno nezavisna napona prikazanim na slici 2.8.3.

Napon  $v_{i2}(t)$  može se predstaviti superpozicijom tri međusobno nezavisna napona prikazanim na slici 2.8.4.



Slika 2.8.3



Slika 2.8.4

Napon  $v_{i1}(t)$  je:

$$\begin{aligned} v_{i1}(t) &= v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = \\ &= atU(t) - a(t-T)U(t-T) - VU(t-T) \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Napon  $v_{i2}(t)$  je:

$$\begin{aligned} v_{i2}(t) &= v_4(t) + v_5(t) + v_6(t) = \\ &= -a(t-T)U(t-T) + VU(t-T) + a(t-2T)U(t-2T) \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Iz jednačina (2.8.4) i (2.8.5) sledi da je ulazni napon:

$$v_i(t) = atU(t) - 2a(t-T)U(t-T) + a(t-2T)U(t-2T) \quad (2.8.6)$$

Primenom direktne Laplasove transformacije jednačina (2.8.6) postaje:

$$V_i(s) = L[v_i(t)] = \frac{a}{s^2} - \frac{2a}{s^2}e^{-sT} + \frac{a}{s^2}e^{-2sT} \quad (2.8.7)$$

Prenosna funkcija kola sa slike 2.8.1 je:

$$G(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}, \quad \tau = RC \quad (2.8.8)$$

Izlazni napon je:

$$V_o(s) = G(s)V_i(s) = a \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} - 2a \frac{e^{-sT}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} + a \frac{e^{-2sT}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \quad (2.8.9)$$

Zakon promene izlaznog napona sa vremenom je:

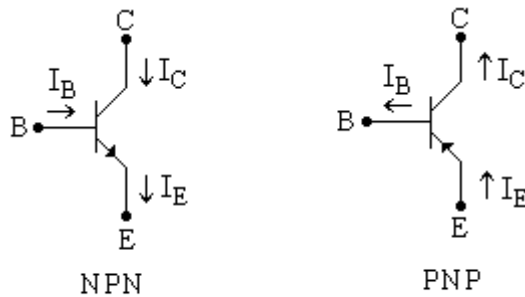
$$v_o(t) = a\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) U(t) - 2a\tau \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right) U(t-T) + a\tau \left(1 - e^{-\frac{t-2T}{\tau}}\right) U(t-2T)$$

### 3. TRANZISTORI

Tranzistori su aktivni elementi koji prenose na potrošač veću snagu od one koju ulaže pobudni generator, na račun snage koju ulaže jednosmerni izvor za napajanje. Pored korišćenja u pojačavačkim kolima, tranzistori se koriste i u impulsnim i digitalnim kolima, pošto se brzo mogu prevesti iz stanja koje predstavlja približno kratak spoj, u stanje koje predstavlja otvorena vezu. Postoje dva tipa tranzistora: bipolarni tranzistori (BJT - tranzistori) i tranzistori sa efektom polja (FET - tranzistori).

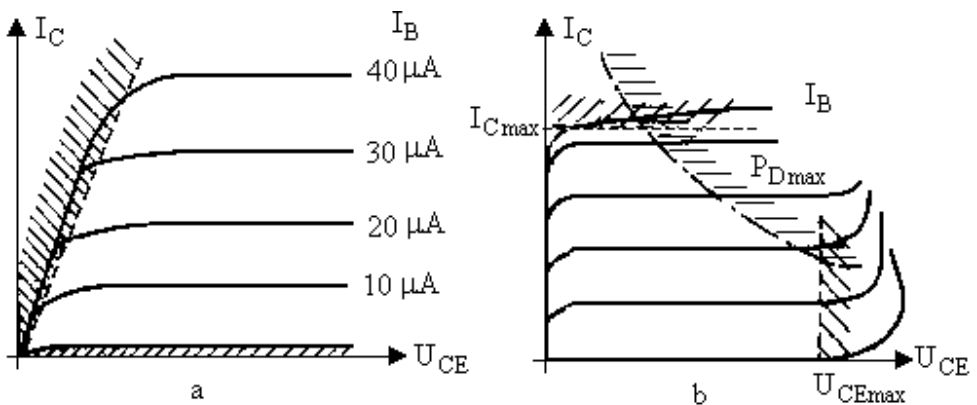
#### BIPOLARNI TRANZISTORI

Bipolarni tranzistori su elementi sa tri izvoda: baza B, emitor E i kolektor C. Izrađuju se u dva oblika PNP i NPN čiji su simboli prikazani na slici 1. Da bi tranzistor radio kao linearni pojačavač potrebno je da spoj baza – emitor bude direktno polarisan, a spoj baza – kolektor inverzno polarisan. Veza između jednosmernih struja tranzistora u ovom režimu je:  $I_C = \beta I_B$  i  $I_E = (\beta+1)I_B$ , gde je  $\beta$  koeficijent strujnog pojačanja. Isti odnos važi i za naizmenične struje, odnosno:  $I_c = \beta I_b$  i  $I_e = (\beta+1)I_b$ .



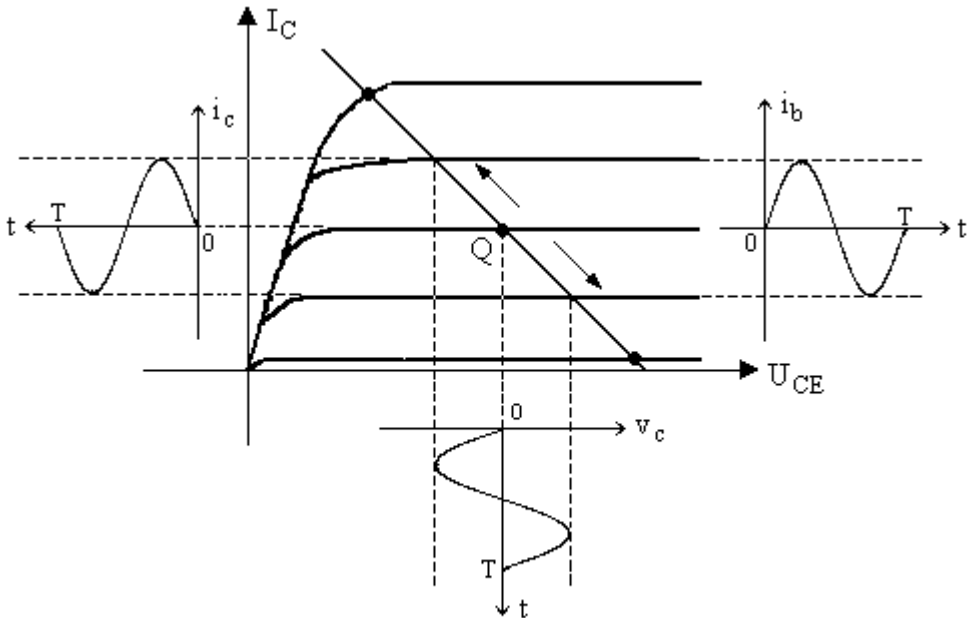
Slika 1

Na slici 2 je data zavisnost struje kolektora  $I_C$  od napona  $V_{CE}$  za razne vrednosti struje baze. Napon  $V_{CE}$  ima veliki uticaj na struju kolektora u dve oblasti: za veoma male napone  $V_{CE}$  (0.1 V do 0.3 V) kada tranzistor radi u zasićenju (slika 2a) i za velike napone (25 V do 50 V) kada nastupa proboj (slika 2b). Između ove dve oblasti tranzistor radi u aktivnom režimu i napon  $V_{CE}$  manje utiče na struju  $I_C$ . Struja  $I_C$  ima svoju minimalnu i maksimalnu vrednost. Minimalna vrednost određena je uslovom da se tranzistor ne zakoči, a maksimalna je određena maksimalno dozvoljenom disipacijom  $P_{Dmax} = (V_{CE}I_C)_{max}$ .



Slika 2

U pojačavačkim kolima sa bipolarnim tranzistorima jednosmerno stanje napona i struja u kolu je opisano radnom tačkom Q (mirnom tačkom), koja predstavlja stanje napona i struja na krajevima tranzistora u odsustvu promenjivog signala na ulazu pojačavačkog kola (slika 3).



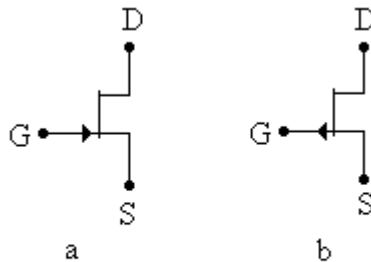
Slika 3

Radna tačka leži na radnoj pravil. Kada na ulaz pojačavačkog kola deluje promenjiv signal, naponi i struje na krajevima tranzistora ne ostaju na vrednostima datim radnom tačkom, već se menjaju duž radne prave. Za radnu tačku tranzistora u pojačavačkim kolima se može odabrati bilo koja tačka na radnoj pravil, u granicama dozvoljenih napona i struja. U linearnim pojačavačkim kolima radnu tačku treba postaviti na sredini radne prave tako da promena ulaznog signala ne dovede do izobličenja izlaznog signala.

Na slici 3 je prikazana uticaj sinusne promene struje baze na položaj radne tačke. Pojačavačka kolo sa bipolarnim tranzistorima rade u linearnom režimu samo za male promene signala u okolini radne tačke Q.

### **TRANZISTORI SA EFEKTOM POLJA**

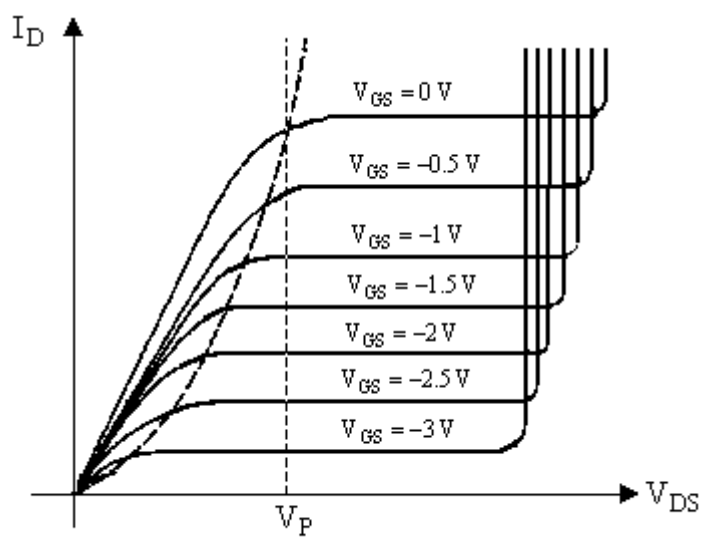
Tranzistori sa efektom polja su elementi sa tri izvoda: gejnt G, sors S i drejn D. Dve osnovne vrste tranzistora sa efektom polja su JFET i MOSFET. JFET - ovi mogu biti N - kanalni (slika 4a) ili P - kanalni (slika 4b).



Slika 4

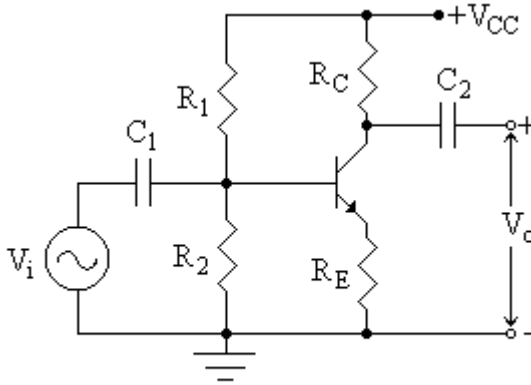
Na slici 5 je za N - kanalni JFET data zavisnost struje drejna  $I_D$  od napona  $V_{DS}$  za razne vrednosti napona  $V_{GS}$ . Na slici je ucrtana linija  $V_{DS} = V_{GS} - V_P$ , gde je  $V_P$  napon praga provođenja. Da bi pojačavač sa JFET - om radio kao linearni pojačavač mirnu radnu tačku treba postaviti desno od ove linije, odnosno za N - kanalni JFET treba da važi  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$ .





Slika 5

3.1) U pojačavaču sa zajedničkim emitorom sa slike 3.1 odrediti jednosmerne struje kolektora  $I_C$ , emitora  $I_E$  i baze  $I_B$ , kao i jednosmerne napone na kolektoru  $V_C$ , emitoru  $V_E$  i bazi  $V_B$ . Poznato je:  $R_1 = 15\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5\text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 4\text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 2\text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $V_{CC} = 15\text{ V}$ ,  $V_{BE} = 0.6\text{ V}$ ,  $\beta = 100$ .

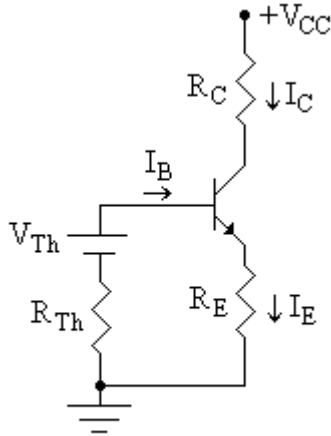


Slika 3.1

Rešenje:

Da bi odredili jednosmerne struje i jednosmerne napone u kolu potrebno je odrediti baznu struju. Kada je tranzistor u aktivnom režimu (spoj baza – emitor direktno polarisan, a spoj baza – kolektor inverzno polarisan), određivanjem struje baze, određene su i sve struje i naponi u kolu. Kondenzatori  $C_1$  i  $C_2$  su prazni pre uključenja jednosmernog napajanja  $V_{CC}$ . Kada se uključi jednosmerno napajanje kondenzatori se u prelaznom režimu pune do napona koji su određeni elementima kola kroz koje teče struja u stacionarnom stanju. Kondenzator  $C_1$  onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz pobudni generator  $V_i$ , a kondenzator  $C_2$

onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz potrošač. Za jednosmerni režim rada kolo sa slike 3.1 može se prikazati kolom na slici 3.1.1, pri čemu je bazno kolo ( $V_{CC}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ) predstavljeno pomoću ekvivalentnog Tevenenovog kola.



Slika 3.1.1

Prema Tevenenovoj teoremi je:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} = 3.75 \text{ V} \quad (3.1.1)$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3.75 \text{ k}\Omega \quad (3.1.2)$$

Zbir padova napona po konturi baza – emitor daje:

$$V_{Th} - R_{Th} I_B - V_{BE} - R_E I_E = 0 \quad (3.1.3)$$

Kako je:

$$I_E = (\beta + 1) I_B \quad (3.1.4)$$

Iz jednačina (3.1.3) i (3.1.4) sledi da je bazna struja:

$$I_B = \frac{V_{Th} - V_{BE}}{R_{Th} + (\beta + 1)R_E} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ A} \quad (3.1.5)$$

Tada je:

$$I_C = \beta I_B = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$I_E = (\beta + 1)I_B = 1.51 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$V_B = V_{Th} - R_{Th}I_B \cong V_{Th} = 3.75 \text{ V}$$

$$V_E = V_B - V_{BE} = 3.15 \text{ V}$$

$$V_C = V_{CC} - R_C I_C = 9 \text{ V}$$

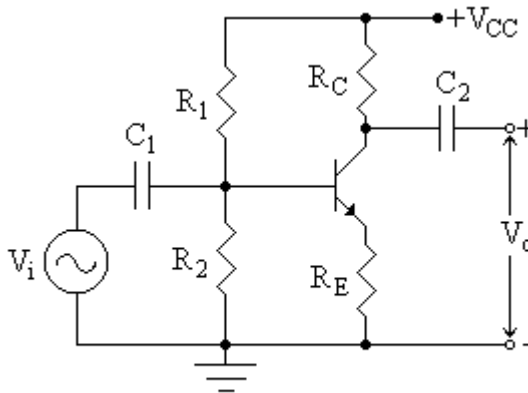
3.2) Za pojačavač sa zajedničkim emitorom sa slike 3.2 izračunati:

a) Naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$

b) Objasniti zašto ne valja uzemljiti emitor

Poznato je:  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,

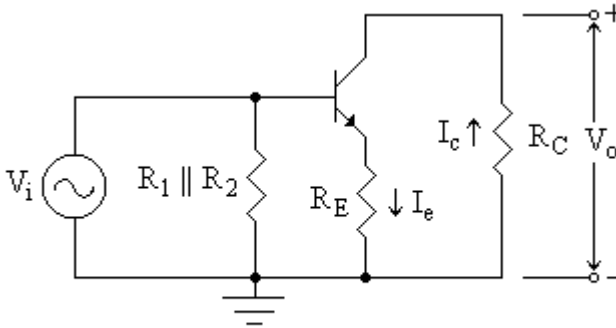
$V_{BE} = 0.6 \text{ V}$ ,  $\beta = 100$ ,  $C \rightarrow \infty$ .



Slika 3.2

Rešenje:

Kako  $C \rightarrow \infty$ ,  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$ , kondenzator C predstavlja kratku vezu za naizmeničnu struju. Za naizmenični režim kolo sa slike 3.2 može se prikazati kolom na slici 3.2.1.



Slika 3.2.1

a) Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} \tag{3.2.1}$$

gde su:

$$V_o = -R_C I_c \tag{3.2.2}$$

$$V_i = V_{be} + R_E I_e \tag{3.2.3}$$

$$V_{be} = \frac{I_e}{g_m} \tag{3.2.4}$$

Transkonduktansa  $g_m$  povezana je sa otporom emitora relacijom

$$g_m = \frac{1}{r_e}. \text{ Transkonduktansa } g_m \text{ data je relacijom:}$$

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} \quad (3.2.5)$$

gde su:

$$V_T = \frac{kT}{e} \quad (3.2.6)$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  – Bolcmanova konstanta

$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  – elementarno naelektrisanje

$T$  – apsolutna temperatura

Na sobnoj temperaturi  $V_T \cong 25 \text{ mV}$ .

Jednosmerna struja kolektora je data relacijom (videti prethodni zadatak):

$$I_C = \frac{\beta(V_{CC} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_{BE})}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + (\beta + 1)R_E} = 3.2 \text{ mA} \quad (3.2.7)$$

Tada je transkonduktansa  $g_m = 0.13 \frac{\text{A}}{\text{V}}$ .

Iz jednačina (3.2.3) i (3.2.4) sledi da je:

$$V_i = \left( \frac{1}{g_m} + R_E \right) I_e = \frac{1 + g_m R_E}{g_m} I_e \quad (3.2.8)$$

Kako je:

$$I_c = \frac{\beta}{\beta + 1} I_e \cong I_e \quad (3.2.9)$$

naponsko pojačanje je :

$$G = -\frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} = -4.98 \quad (3.2.10)$$

Kako je  $g_m R_E \gg 1$  naponsko pojačanje je:

$$G \cong -\frac{R_C}{R_E} \quad (3.2.11)$$

b) Kod pojačavača sa zajedničkim emitorom naponsko pojačanje zavisi od odnosa otpornika  $R_C$  i  $R_E$ . U slučaju kada je  $R_E = 0$  (pojačavač sa uzemljenim emitorom) naponsko pojačanje bi bili veoma veliko

$$G = -g_m R_C = -\frac{R_C}{r_e}. \text{ Međutim, otpornost } r_e \text{ je veoma zavisna od promene}$$

temperature ambijenta i od mirne radne tačke, odnosno jednosmerne struje kolektora  $I_C$  (jednačina (3.2.5)). Struja kolektora je:

$$I_C = I_{se} \frac{V_{BE}}{V_T} \quad (3.2.12)$$

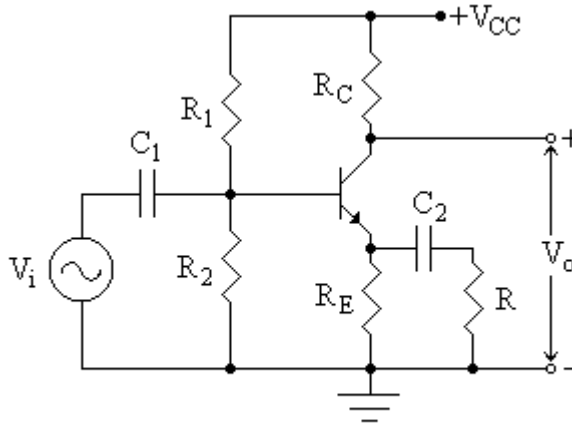
i sa promenom ulaznog napona menja se struja  $I_C$ , a samim tim i  $r_e$ . Zato pojačanje ovog stepena zavisi od trenutne vrednosti napona na ulazu, pa će napon na izlazu biti deformisan. Pojačavač sa uzemljenim emiterom je nepodesan za polarizaciju. Sa promenom temperature, pri konstantnoj struji  $I_C$ , napon  $V_{BE}$  se smanjuje za oko  $2.1 \text{ mV} / ^\circ\text{C}$  (napon  $V_{BE}$  je proporcionalan sa  $\frac{1}{T}$ ). Zbog toga struja  $I_C$  raste sa porastom temperature (za faktor 10 sa porastom temperature za  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ ), i male promene temperature mogu da dovedu pojačavač u saturaciju. Zato se ne koristi često pojačavač sa uzemljenim emiterom.

3.3) Dizajnirati pojačavač sa zajedničkim emitorom koji ima pojačanje  $G = -100$  i koji se napaja iz izvora  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ . Struju kolektora u mirnoj radnoj tački postaviti na  $I_C = 0.5 \text{ mA}$ , a graničnu učestanost ulaznog kola postaviti na  $f_g = 100 \text{ Hz}$ . Radi temperaturene stabilnosti napon na emitoru u

mirnoj radnoj tački postaviti na  $V_E = 1$  V. Objasniti ulogu svih elemenata u kolu. Poznato je:  $\beta = 100$ ,  $V_{BE} = 0.6$  V.

Rešenje:

Na slici 3.3.1 je prikazana realizacija pojačavača sa zajedničkim emitorom sa NPN tranzistorom.

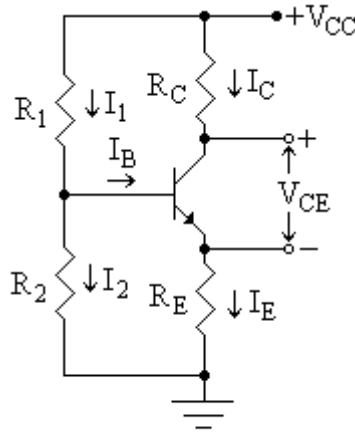


Slika 3.3.1

Otpornici  $R_1$  i  $R_2$  vrše polarizaciju baze. Otpornik  $R_E$  određuje jednosmerni napon na emitoru i zajedno sa otpornikom  $R_C$  određuje jednosmernu struju kolektora u mirnoj radnoj tački. Otpornik  $R$  reguliše naponsko pojačanje. Kondenzator  $C_1$  onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz pobudni generator, a kondenzator  $C_2$  onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz otpornik  $R$  i predstavlja kratku vezu za naizmeničan signal.

Za jednosmerni režim rada kolo sa slike 3.3.1 izgleda kao kolo na slici 3.3.2.





Slika 3.3.2

Jednosmerni napon  $V_{CE}$  treba postaviti na polovini napona napajanja  $V_{CC}$  (sredina radne prave) da bi se dobilo maksimalno neizobličen signal na izlazu.

$$V_{CE} = \frac{V_{CC}}{2} \quad (3.3.1)$$

Sa slike 3.3.2 se vidi da je:

$$V_{CC} - R_C I_C - V_{CE} - R_E I_E = 0 \quad (3.3.2)$$

Kako je:

$$I_E = I_C + I_B \cong I_C \quad (3.3.3)$$

Iz jednačina (3.3.1), (3.3.2) i (3.3.3) sledi da je:

$$\frac{V_{CC}}{2} = I_C (R_C + R_E) \quad (3.3.4)$$

Jednosmerni napon na emitoru je:

$$V_E = R_E I_E \cong R_E I_C \quad (3.3.5)$$

Tada je:

$$R_E = \frac{V_E}{I_C} = 2 \text{ k}\Omega \quad (3.3.6)$$

Iz jednačina (3.3.4) i (3.3.6) sledi da je:

$$R_C = \frac{V_{CC}}{2I_C} - R_E = 13 \text{ k}\Omega \quad (3.3.7)$$

Jednosmerni napon na bazi je:

$$V_B = V_E + V_{BE} = 1.6 \text{ V} \quad (3.3.8)$$

Otpornike  $R_1$  i  $R_2$  treba odabrati tako da jednosmerna struja baze bude mnogo manja (obično 10 puta) u odnosu na struju kroz razdelnik napona  $R_1, R_2$ . Tada je  $I_1 \cong I_2 = I$  i struja  $I$  je:

$$I = \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} \cong 10I_B = 10 \frac{I_C}{\beta} = \frac{I_C}{10} \quad (3.3.9)$$

Jednosmerni napon na bazi je tada:

$$V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (3.3.10)$$

Iz jednačine (3.3.9) sledi da je:

$$R_1 + R_2 = \frac{10V_{CC}}{I_C} = 300 \text{ k}\Omega \quad (3.3.11)$$

Iz jednačina (3.3.10) i (3.3.11) sledi da je:

$$R_2 = \frac{V_B}{V_{CC}} (R_1 + R_2) = 32 \text{ k}\Omega \quad (3.3.12)$$

$$R_1 = 268 \text{ k}\Omega \quad (3.3.13)$$

Za naimenični režim kolo sa slike 3.3.1 može se prikazati kolom na slici 3.3.3. Naponsko pojačanje je:

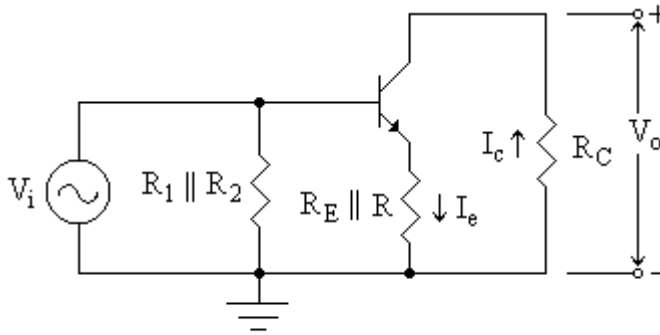
$$G = \frac{V_o}{V_i} \quad (3.3.14)$$

gde su:

$$V_o = -R_C I_c \quad (3.3.15)$$

$$V_i \cong (R_E \parallel R) I_e \quad (3.3.16)$$

$$I_c = \frac{\beta}{\beta + 1} I_e \cong I_e \quad (3.3.17)$$



Slika 3.3.3

Iz jednačina (3.3.15), (3.3.16) i (3.3.17) sledi da je naponsko pojačanje:

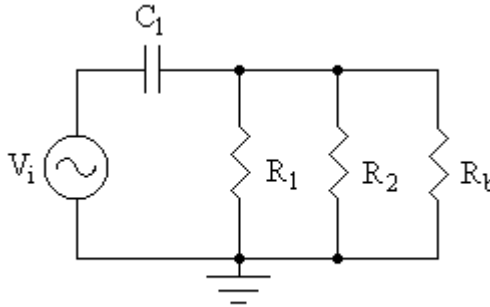
$$G = -\frac{R_C}{R_E \parallel R} = -\frac{R_C(R_E + R)}{R_E R} \quad (3.3.18)$$

Iz jednačine (3.3.18) sledi da je:

$$R = -\frac{R_E}{1 + \frac{R_E}{R_C} G} \quad (3.3.19)$$

Da bi pojačanje stepena sa zajedničkim emitorom bilo  $G = -100$ , potrebno je da  $R = 139 \Omega$ .

Granična učestanost određena kondenzatorom  $C_1$  zavisi od naizmenične otpornosti koju vidi ovaj kondenzator (slika 3.3.4). Ova otpornost je  $R_1 \parallel R_2 \parallel R_b$ , gde je  $R_b = (\beta+1) R_E \parallel R$  – otpornost koju vidi naizmenični signal u bazi.



Slika 3.3.4

Granična učestanost je:

$$f_g = \frac{1}{2\pi C_1 (R_1 \parallel R_2 \parallel R_b)} \quad (3.3.20)$$

Iz jednačine (3.3.20) sledi da je:

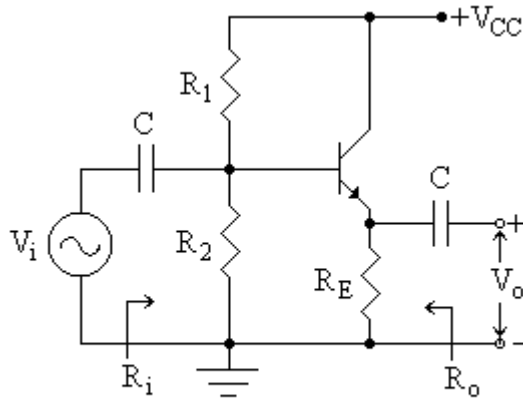
$$C_1 = \frac{1}{2\pi f_g (R_1 \parallel R_2 \parallel R_b)} = 0.18 \mu\text{F} \quad (3.3.21)$$

3.4) Za emitter follower sa slike 3.4 izračunati:

a) naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$

b) ulaznu otpornost  $R_i$  i izlaznu otpornost  $R_o$

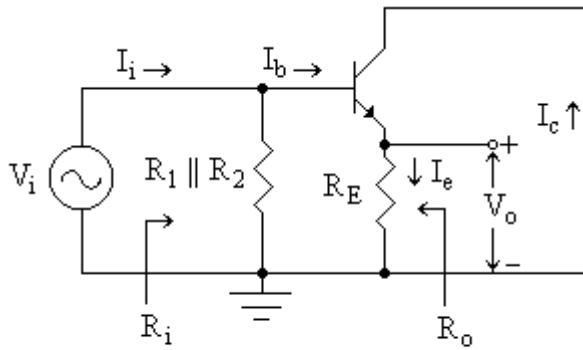
Poznato je:  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 0.5 \text{ k}\Omega$ ,  $\beta = 100$ ,  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,  $V_{BE} = 0.6 \text{ V}$ ,  $C \rightarrow \infty$ .



Slika 3.4

Rešenje:

Za naizmenični režim kolo sa slike 3.4 može se prikazati kolom na slici 3.4.1.



Slika 3.4.1

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} \tag{3.4.1}$$

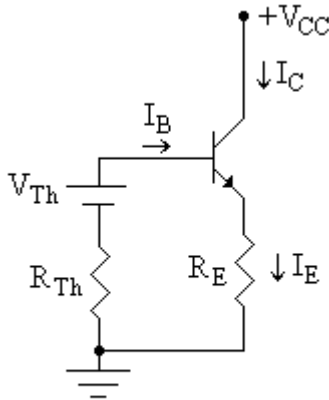
gde su:

$$V_i = V_{be} + R_E I_e = \left( \frac{1}{g_m} + R_E \right) I_e \quad (3.4.2)$$

$$V_o = R_E I_e \quad (3.4.3)$$

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} \quad (3.4.4)$$

Da bi izračunali jednosmernu struju kolektora  $I_C$ , kolo sa slike 3.4 se za jednosmerni režim može prikazati kolom na slici 3.4.2.



Slika 3.4.2

Prema Tevenenovoj teoremi je:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} = 7.5 \text{ V} \quad (3.4.5)$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ k}\Omega \quad (3.4.6)$$

Zbir padova napona po konturi baza – emitor daje:

$$V_{Th} - R_{Th} I_B - V_{BE} - R_E I_E = 0 \quad (3.4.7)$$

Kako je:

$$I_E = (\beta + 1)I_B \quad (3.4.8)$$

Iz jednačina (3.4.7) i (3.4.8) sledi da je bazna struja:

$$I_B = \frac{V_{Th} - V_{BE}}{R_{Th} + (\beta + 1)R_E} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (3.4.9)$$

Tada je:

$$I_C = \beta I_B = 1 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ A}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ V}} = 0.4 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

Iz jednačina (3.4.2) i (3.4.3) sledi da je naponsko pojačanje:

$$G = \frac{g_m R_E}{1 + g_m R_E} = 0.995 \quad (3.4.10)$$

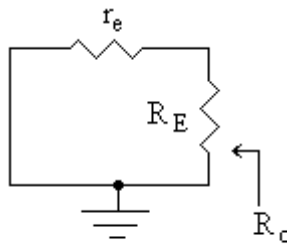
b) Ulazna otpornost je:

$$R_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_i}{I_b + \frac{V_i}{R_1 \parallel R_2}} = \frac{V_{be} + R_E I_e}{\frac{I_e}{\beta + 1} + \frac{V_{be} + R_E I_e}{R_1 \parallel R_2}} =$$

$$= \frac{(\beta + 1)(r_e + R_E)}{1 + \frac{(\beta + 1)(r_e + R_E)}{R_1 \parallel R_2}} \cong 8 \text{ k}\Omega \quad (3.4.11)$$

Izlazna otpornost može se prema Tevenenovoj teoremi izračunati stavljanjem kratke veze umesto pobudnog generatora  $V_i$ . Izlazno kolo tada izgleda kao na slici 3.4.3. Izlazna otpornost je:

$$R_o = \frac{R_E r_e}{R_E + r_e} \cong r_e = 2.5 \Omega \quad (3.4.12)$$



Slika 3.4.3

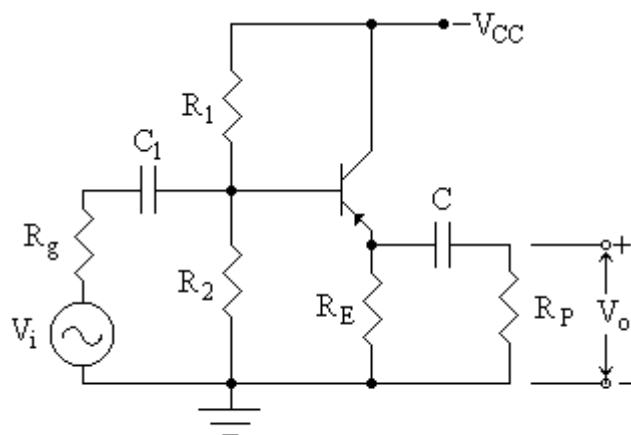
Emitter follower ima naponsko pojačanje oko 1, veliku ulaznu i malu izlaznu otpornost i obično se koristi kao stepen za prilagođavanje impedansi.

3.5) Dizajnirati emitter follower pomoću PNP tranzistora koji se napaja iz izvora od  $V_{CC} = 15 \text{ V}$  i koji omogućava generatoru sa unutrašnjom otpornošću od  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$  da pobuđuje opterećenje od  $R_P = 5 \text{ k}\Omega$ , ispred koga se nalazi kondenzator od  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Struju kolektora u mirnoj radnoj tački postaviti na  $I_C = 0.5 \text{ mA}$ , a graničnu učestanost ulaznog kola postaviti na  $f_g = 100 \text{ Hz}$ . Objasniti ulogu svih elemenata u kolu. Poznato je:  $\beta = 100$ ,  $V_{BE} = -0.6 \text{ V}$ .

Rešenje:

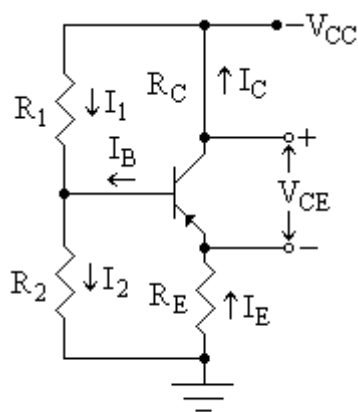
Na slici 3.5.1 prikazana je realizacije emitter followera pomoću PNP tranzistora. Otpornici  $R_1$  i  $R_2$  vrše polarizaciju baze. Otpornik  $R_E$  određuje jednosmerni napon na emitoru i jednosmernu struju kolektora u mirnoj radnoj tački. Kondenzator  $C_1$  onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz pobudni generator, a kondenzator  $C$  onemogućava prolaz jednosmerne struje kroz potrošač  $R_P$  i predstavlja kratku vezu za naizmeničan signal.





Slika 3.5.1

Za jednosmerni režim rada kolo sa slike 3.5.1 izgleda kao kolo na slici 3.5.2.



Slika 3.5.2

Jednosmerni napon  $V_{CE}$  treba postaviti na polovini napona napajanja  $-V_{CC}$  (sredin radne prave) da bi se dobio maksimalno neizobličen signal na izlazu.

$$V_{CE} = -\frac{V_{CC}}{2} \quad (3.5.1)$$

Sa slike 3.5.2 se vidi da je:

$$V_{CE} = -V_{CC} - V_E \quad (3.5.2)$$

$$I_E = I_C + I_B \cong I_C \quad (3.5.3)$$

Jednosmerni napon na emitoru je:

$$V_E = \frac{-V_{CC} - V_{CE}}{2} = -7.5 \text{ V} \quad (3.5.4)$$

Otpornost  $R_E$  je:

$$R_E = -\frac{V_E}{I_E} \cong -\frac{V_E}{I_C} = 15 \text{ k}\Omega \quad (3.5.5)$$

Jednosmerni napon na bazi je:

$$V_B = V_E + V_{BE} = -8.1 \text{ V} \quad (3.5.6)$$

Otpornike  $R_1$  i  $R_2$  treba odabrati tako da jednosmerna struja baze bude mnogo manja (obično 10 puta) u odnosu na struju kroz razdelnik napona  $R_1$ ,  $R_2$ . Tada je  $I_1 \cong I_2 = I$  i struja  $I$  je:

$$I = -\frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} \cong -10I_B = -10\frac{I_C}{\beta} = -\frac{I_C}{10} \quad (3.5.7)$$

Tada je:

$$V_B = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (3.5.8)$$

Iz jednačine (3.5.7) sledi da je:

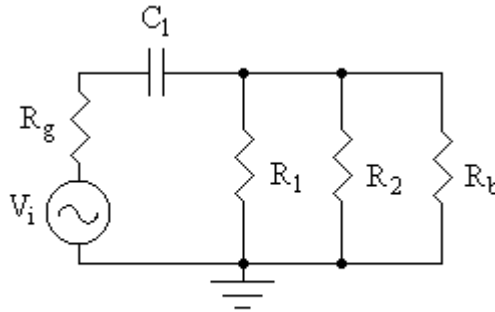
$$R_1 + R_2 = \frac{10V_{CC}}{I_C} = 300 \text{ k}\Omega \quad (3.5.9)$$

Iz jednačina (3.5.8) i (3.5.9) sledi da je:

$$R_2 = -\frac{V_B}{V_{CC}}(R_1 + R_2) = 162 \text{ k}\Omega \quad (3.5.10)$$

$$R_1 = 138 \text{ k}\Omega \quad (3.5.11)$$

Granična učestanost određena kondenzatorom  $C_1$  zavisi od naizmenične otpornosti koju vidi ovaj kondenzator (slika 3.5.3). Ova otpornost je  $R_g + R_1 \parallel R_2 \parallel R_b$ , gde je  $R_b = (\beta+1) R_E \parallel R_P$  – otpornost koju vidi naizmenični signal u bazi.



Slika 3.5.3

Granična učestanost je:

$$f_g = \frac{1}{2\pi C_1 (R_g + R_1 \parallel R_2 \parallel R_b)} \quad (3.5.12)$$

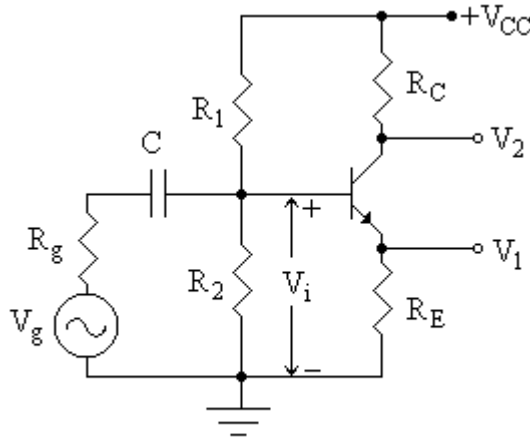
Iz jednačine (3.5.12) sledi da je:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi f_g (R_g + R_1 \parallel R_2 \parallel R_b)} = 25 \text{ nF} \quad (3.5.13)$$

3.6) Dizajnirati razdvajač faze pomoću NPN tranzistora na osnovu sledećih podataka:  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,  $I_C = 1 \text{ mA}$ ,  $V_{BE} = 0.6 \text{ V}$ ,  $\beta = 100$ . Razdvajač faze se napaja iz generatora unutrašnje otpornosti od  $R_g = 2 \text{ k}\Omega$ .

Rešenje:

Razdvajač faze je pojačavač sa dva izlazna priključka na kojima se javljaju naponi jednakih amplituda, a suprotnih faza. Na slici 3.6.1 je prikazana realizacija ovog pojačavača pomoću NPN tranzistora.



Slika 3.6.1

Pojačanje od ulaza  $V_g$  do izlaza  $V_1$  je:

$$G_1 = \frac{V_1}{V_g} = \frac{V_1}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_g} \quad (3.6.1)$$

gde su:

$$\frac{V_i}{V_g} = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_g} \quad (3.6.2)$$

$$V_i = \frac{1}{g_m} I_e + V_1 = \left( \frac{1}{g_m R_E} + 1 \right) V_1 = \frac{1 + g_m R_E}{g_m R_E} V_1 \quad (3.6.3)$$

Tada je:

$$G_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_g} \cdot \frac{g_m R_E}{1 + g_m R_E} \quad (3.6.4)$$

Pojačanje od ulaza  $V_g$  do izlaza  $V_2$  je:

$$G_2 = \frac{V_2}{V_g} = \frac{V_2}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_g} \quad (3.6.5)$$

gde je:

$$\frac{V_2}{V_i} = - \frac{R_C I_e}{\left( \frac{1}{g_m} + R_E \right) I_e} = - \frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} \quad (3.6.6)$$

Tada je:

$$G_2 = - \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_g} \cdot \frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} \quad (3.6.7)$$

Da bi  $G_1 = - G_2$ , iz jednačina (3.6.4) i (3.6.7) sledi je potrebno da  $R_C = R_E$ .

Za jednosmerni režim kolo sa slike 3.6.1 izgleda kao kolo na slici 3.6.2. Jednosmerni napon  $V_{CE}$  treba postaviti na polovini napona napajanja  $V_{CC}$  da bi se dobio maksimalno neizobličen signal na izlazu.

$$V_{CE} = \frac{V_{CC}}{2} \quad (3.6.8)$$

Sa slike 3.6.2 se vidi da je:

$$V_{CC} - R_C I_C - V_{CE} - R_C I_E = 0 \quad (3.6.9)$$

Kako je:

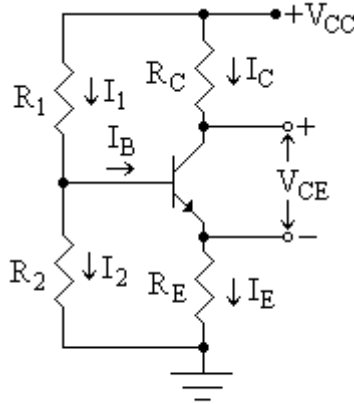
$$I_E = I_C + I_B \cong I_C \quad (3.6.10)$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je:

$$\frac{V_{CC}}{2} = 2I_C R_C \quad (3.6.11)$$

odnosno:

$$R_C = \frac{V_{CC}}{4I_C} = 3.75 \text{ k}\Omega \quad (3.6.12)$$



Slika 3.6.2

Jednosmerni napon na emitoru je:

$$V_E = R_E I_E \cong R_C I_C = 3.75 \text{ V} \quad (3.6.13)$$

Jednosmerni napon na bazi je:

$$V_B = V_E + V_{BE} = 4.35 \text{ V} \quad (3.6.14)$$

Otpornike  $R_1$  i  $R_2$  treba odabrati tako da jednosmerna struja baze bude mnogo manja (obično 10 puta) u odnosu na struju kroz razdelnik napona  $R_1, R_2$ . Tada je  $I_1 \cong I_2 = I$  i struja  $I$  je:

$$I = \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} \cong 10I_B = 10 \frac{I_C}{\beta} = \frac{I_C}{10} \quad (3.6.15)$$

Jednosmerni napon na bazi je:

$$V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (3.6.16)$$

Iz jednačine (3.6.15) sledi da je:

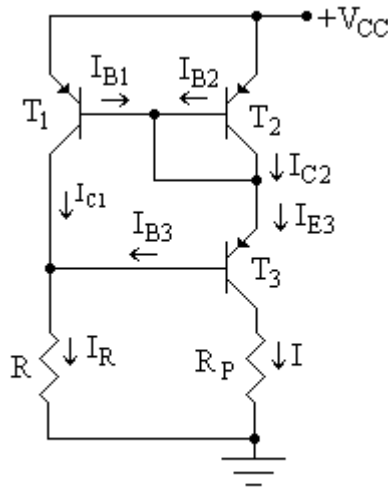
$$R_1 + R_2 = \frac{10V_{CC}}{I_C} = 150 \text{ k}\Omega \quad (3.6.17)$$

Iz jednačina (3.6.16) i (3.6.17) sledi da je:

$$R_2 = \frac{V_B}{V_{CC}}(R_1 + R_2) = 43.5 \text{ k}\Omega \quad (3.6.18)$$

$$R_1 = 106.5 \text{ k}\Omega \quad (3.6.19)$$

3.7) Za Wilson - ov strujni izvor sa slike 3.7 odrediti :



Slika 3.7

a) odnos struja  $\frac{I_R}{I}$

b) vrednost otpora R za koji je  $I = 5 \text{ mA}$

Svi tranzistori su identičnih karakteristika. Poznato je:  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,  $\beta = 100$ ,  $V_{BE} = -0.6 \text{ V}$ .

Rešenje:

a) Kako su tranzistori  $T_1$  i  $T_2$  identičnih karakteristika i imaju isti napon baza – emitor to su im i bazne struje identične  $I_{B1} = I_{B2} = I$ . Sa slike 3.7 se vidi da su:

$$I_{E3} = I_{C2} + 2I_B = (\beta + 2)I_B \quad (3.7.1)$$

$$I = I_{C3} = \frac{\beta}{\beta + 1} I_{E3} = \frac{\beta(\beta + 2)}{\beta + 1} I_B \quad (3.7.2)$$

$$I_R = I_{C1} + I_{B3} = \beta I_B + \frac{I_{E3}}{\beta + 1} = \left(\beta + \frac{\beta + 2}{\beta + 1}\right) I_B \quad (3.7.3)$$

Iz jednačina (3.7.2) i (3.7.3) sledi da je:

$$\frac{I_R}{I} = \frac{\beta^2 + 2\beta + 2}{\beta(\beta + 2)} \quad (3.7.4)$$

b) Sa slike 3.7 se vidi da su:

$$I_R = \frac{V_{B3}}{R} = \frac{V_{E3} + V_{BE}}{R} \quad (3.7.5)$$

$$V_{E3} = V_{B1} = V_{E1} + V_{BE} = V_{CC} + V_{BE} \quad (3.7.6)$$

Iz jednačina (3.7.5) i (3.7.6) sledi da je:

$$I_R = \frac{V_{CC} + 2V_{BE}}{R} \quad (3.7.7)$$

Iz jednačina (3.7.3) i (3.7.7) sledi da je:

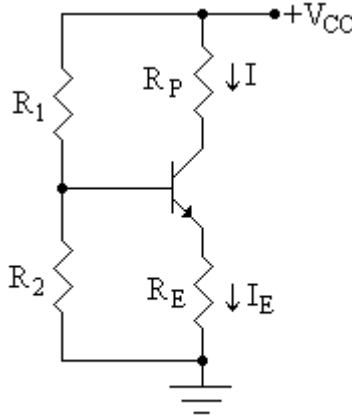
$$R = \frac{\beta(\beta + 2)}{\beta^2 + 2\beta + 2} \cdot \frac{V_{CC} + 2V_{BE}}{I} = 2.8 \text{ k}\Omega \quad (3.7.8)$$

3.8) Dizajnirati strujni izvor od 1 mA za potrošač  $R_P$  čija otpornost varira u opsegu do 3 k $\Omega$  koristeći jedan tranzistor koji se napaja iz izvora  $V_{CC} = 15$  V. Poznato je:  $V_{BE} = 0.6$  V,  $\beta = 100$ .



Rešenje:

Na slici 3.8.1 prikazana je realizacije strujnog izvora pomoću NPN tranzistora.



Slika 3.8.1

Najniži napon na kolektoru je:

$$(V_C)_{\min} = V_{CC} - (R_P)_{\max} I = 12 \text{ V} \quad (3.8.1)$$

Da bi tranzistor ostao u aktivnom režimu potrebno je da  $V_B < (V_C)_{\min}$ .

Otpornike  $R_1$  i  $R_2$  treba odabrati tako da jednosmerna struja baze bude mnogo manja u odnosu na struju kroz razdelnik napona  $R_1, R_2$ . Tada je jednosmerni napon na bazi:

$$V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (3.8.2)$$

Usvojimo napon baze  $V_B = 7.5 \text{ V}$ . Tada je  $R_1 = R_2$ . Usvojimo da je  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ . Jednosmerni napon na emitoru je:

$$V_E = V_B - V_{BE} = 6.9 \text{ V} \quad (3.8.3)$$

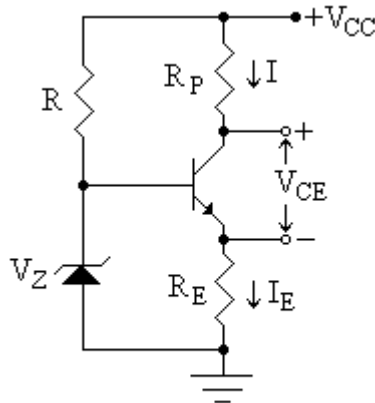
Tada je:

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} \cong \frac{V_E}{I} = 6.9 \text{ k}\Omega \quad (3.8.4)$$

3.9) Dizajnirati strujni izvor od 2 mA koristeći jedan tranzistor koji se napaja iz izvora  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ . Poznato je:  $V_{BE} = 0.6 \text{ V}$ ,  $V_{CES} = 0.2 \text{ V}$ ,  $\beta = 100$ . Za polarizaciju baze koristiti zener diodu od  $V_Z = 5.6 \text{ V}$ .

Rešenje:

Na slici 3.9.1 prikazana je realizacije strujnog izvora pomoću NPN tranzistora kod koga je polarizacija baze izvršena pomoću zenerove diode.



Slika 3.9.1

Kako je jednosmerni napon na bazi jednak  $V_Z$ , jednosmerni napon na emitoru je:

$$V_E = V_Z - V_{BE} = 5 \text{ V} \quad (3.9.1)$$

Tada je:

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} \cong \frac{V_E}{I} = 2.5 \text{ k}\Omega \quad (3.9.2)$$

Maksimalna otpornost potrošača  $R_P$  za koju se izvor sa slike 3.9.1 ponaša kao strujni izvor je određena uslovom da:

$$V_{CE} > V_{CES} = 0.2 \text{ V} \quad (3.9.3)$$

Sa slike 3.9.1 se vidi da je:

$$V_{CE} = V_{CC} - I(R_P + R_E) \quad (3.9.4)$$

Maksimalna vrednost otpora potrošača je:

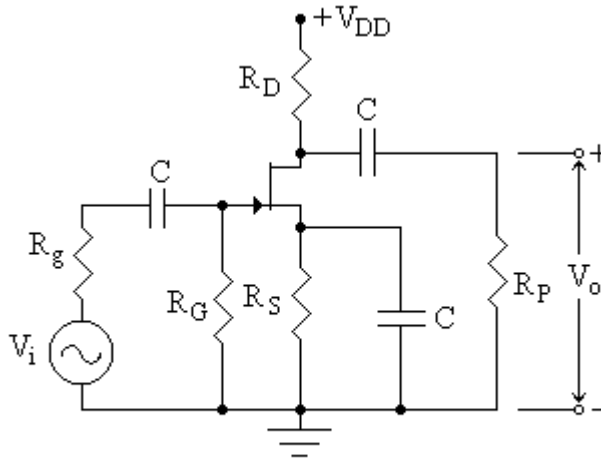
$$(R_P)_{\max} = \frac{V_{CC} - V_{CES} - IR_E}{I} = 4.9 \text{ k}\Omega \quad (3.9.5)$$

3.10) Za pojačavač sa JFET tranzistorom sa slike 3.10 izračunati :

a) struju  $I_D$  u mirnoj radnoj tački i  $V_S$ ,  $V_G$  i  $V_D$

b) naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$

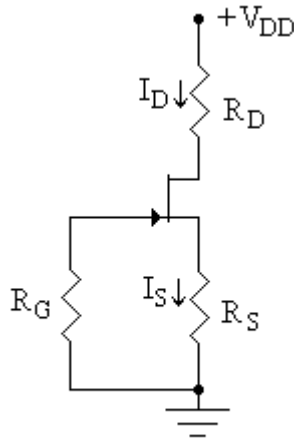
Poznato je:  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_G = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_S = 0.5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_D = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_P = 1 \text{ k}\Omega$ ,  
 $V_{DD} = 20 \text{ V}$ ,  $V_P = -4 \text{ V}$ ,  $I_{DSS} = 8 \text{ mA}$ ,  $C \rightarrow \infty$ .



Slika 3.10

Rešenje:

a) Kako  $C \rightarrow \infty$ , kondenzator C predstavlja otvorenu vezu za jednosmernu struju a kratku vezu za naizmeničnu struju. Za jednosmerni režim kolo sa slike 3.10 može se prikazati kolom na slici 3.10.1.



Slika 3.10.1

Ulazna otpornost JFET-a je veoma velika, pa je jednosmerna struja gejta veoma mala (reda nA). Zbog toga je jednosmerna struja sorsa  $I_S$  približna jednosmernoj struji drejna  $I_D$ . Otpornik  $R_G$  služi da zatvori kolo gejta – sorsa za jednosmerne signale. Otpornik  $R_S$  služi da obezbedi željenu polarizaciju spoja gejta – sorsa, i zajedno sa otpornikom  $R_D$  određuje jednosmernu struju drejna u mirnoj radnoj tački. Kako je struja gejta zanemarljivo mala, pad napona na otporu  $R_G$  je zanemarljivo mali i gejta je na potencijalu mase.

Jednosmerna struja drejna data je jednačinom:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (3.10.1)$$

Kako je  $I_G \cong 0$  A,  $V_G \cong 0$  V i  $I_S \cong I_D$ , jednosmerni napon između gejta i sorsa je:

$$V_{GS} = V_G - V_S = -V_S = -R_S I_D \quad (3.10.2)$$

Iz jednačina (3.10.1) i (3.10.2) sledi da je:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 + \frac{R_S}{V_P} I_D \right)^2 \quad (3.10.3)$$

odnosno:

$$\frac{R_S^2}{V_P^2} I_D^2 + \left( 2 \frac{R_S}{V_P} - \frac{1}{I_{DSS}} \right) I_D + 1 = 0 \quad (3.10.4)$$

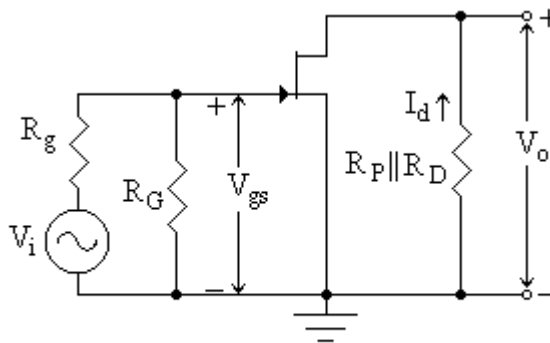
Rešavanjem kvadratne jednačine (3.10.4) po  $I_D$  dobijaju se dva rešenja:  $I_{D1} = 3$  mA i  $I_{D2} = 21$  mA. Rešenje  $I_{D2} = 21$  mA je fizički neprihvatljivo jer je ta struja veća od struje  $I_{DSS}$ . Iz jednačine (3.10.2) sledi da je:

$$V_{GS} = -R_S I_D = -1.5 \text{ V}$$

$$V_S = -V_{GS} = 1.5 \text{ V}$$

$$V_D = V_{DD} - R_D I_D = 8 \text{ V}$$

b) Za naizmenični režim kolo sa slike 3.10 može se prikazati kolom prikazanim na slici 3.10.2.



Slika 3.10.2

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_{gs}} \cdot \frac{V_{gs}}{V_i} \quad (3.10.5)$$

gde je:

$$V_{gs} = \frac{R_G}{R_G + R_g} V_i \quad (3.10.6)$$

Izlazni napon je:

$$V_o = -I_d (R_P \parallel R_D) \quad (3.10.7)$$

Struja drejna  $I_d$  je:

$$I_d = g_m V_{gs} \quad (3.10.8)$$

Transkonduktansa  $g_m$  je:

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} = I_{DSS} 2 \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right) \frac{1}{|V_P|} = \frac{2}{|V_P|} \sqrt{I_D I_{DSS}} = 2.45 \frac{\text{mA}}{\text{V}} \quad (3.10.9)$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je naponsko pojačanje:

$$G = -\frac{R_G}{R_G + R_g} g_m (R_P \parallel R_D) = -1.96 \quad (3.10.10)$$

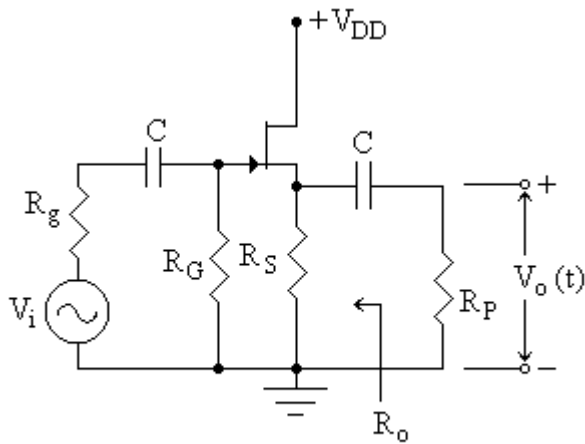
3.11) Za pojačavač sa JFET tranzistorom sa slike 3.11 izračunati :

a) struju  $I_D$  u mirnoj radnoj tački i  $V_S$ ,  $V_G$  i  $V_D$

b) naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$

c) izlaznu otpornost  $R_o$

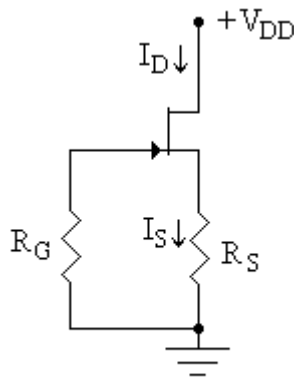
Poznato je:  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_G = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_S = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_P = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{DD} = 10 \text{ V}$ ,  
 $V_P = -2 \text{ V}$ ,  $I_{DSS} = 2 \text{ mA}$ ,  $C \rightarrow \infty$ .



Slika 3.11

Rešenje:

a) Kondenzator C predstavlja otvorenu vezu za jednosmernu struju a kratku vezu za naizmeničnu struju, pa se za jednosmerni režim kolo sa slike 3.11 može se prikazati kolom na slici 3.11.1.



Slika 3.11.1

Jednosmerna struja drejna je:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (3.11.1)$$

Kako je  $I_G \cong 0$  A,  $V_G \cong 0$  V i  $I_S \cong I_D$ , jednosmerni napon između gejta i sorsa je:

$$V_{GS} = V_G - V_S = -V_S = -R_S I_D \quad (3.11.2)$$

Iz jednačina (3.11.1) i (3.11.2) sledi da je:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 + \frac{R_S}{V_P} I_D \right)^2 \quad (3.11.3)$$

odnosno:

$$\frac{R_S^2}{V_P^2} I_D^2 + \left( 2 \frac{R_S}{V_P} - \frac{1}{I_{DSS}} \right) I_D + 1 = 0 \quad (3.11.4)$$

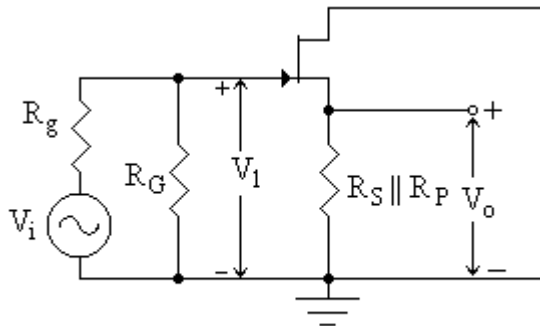
Rešavanjem kvadratne jednačine (3.11.4) po  $I_D$  dobijaju se dva rešenja:  $I_{D1} = 0.5$  mA i  $I_{D2} = 2$  mA. Rešenje  $I_{D2}$  je fizički neprihvatljivo jer je ta struju napon gejta – sors:  $V_{GS2} = -R_S I_{D2} < V_P$ , JFET nije u zasićenju. Zato je  $I_D = I_{D1}$ . Iz jednačine (3.11.2) sledi da je:

$$V_{GS} = -R_S I_D = -1 \text{ V}$$

$$V_S = -V_{GS} = 1 \text{ V}$$

$$V_D = V_{DD} = 10 \text{ V}$$

b) Za naizmenični režim kolo sa slike 3.11 može se prikazati kolom na slici 3.11.2.



Slika 3.11.2



Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_i} \quad (3.11.5)$$

gde su:

$$V_1 = \frac{R_G}{R_G + R_g} V_i \quad (3.11.6)$$

$$V_1 = V_{gs} + (R_S \parallel R_P) I_d \quad (3.11.7)$$

$$V_{gs} = \frac{I_d}{g_m} \quad (3.11.8)$$

Tada je:

$$V_1 = \frac{1 + g_m(R_S \parallel R_P)}{g_m} I_d \quad (3.11.9)$$

Izlazni napon je:

$$V_o = (R_S \parallel R_P) I_d \quad (3.11.10)$$

Iz jednačina (3.11.9) i (3.11.10) sledi da je:

$$\frac{V_o}{V_1} = \frac{g_m(R_S \parallel R_P)}{1 + g_m(R_S \parallel R_P)} \quad (3.11.11)$$

Transkonduktansa  $g_m$  je:

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} = \frac{2}{|V_P|} \sqrt{I_D I_{DSS}} = 1 \frac{\text{mA}}{\text{V}} \quad (3.11.12)$$

Iz jednačina (3.11.5), (3.11.6) i (3.11.11) sledi da je naponsko pojačanje:

$$G = \frac{R_G}{R_G + R_g} \cdot \frac{g_m(R_S \parallel R_P)}{1 + g_m(R_S \parallel R_P)} = 0.582 \quad (3.11.13)$$

c) Izlazna otpornost je paralelna veza otpornosti  $R_S \parallel R_P$  i izlazne otpornosti samog JFET - a koja se može izračunati stavljanjem kratke veze umesto pobudnog generatora  $V_i$ . Pošto je  $V_i = V_g = 0$ , tada je:

$$V_{gs} = V_g - V_s = -V_s \quad (3.11.14)$$

$$r_s = -\frac{V_s}{I_d} = \frac{V_{gs}}{I_d} = \frac{1}{g_m} \quad (3.11.15)$$

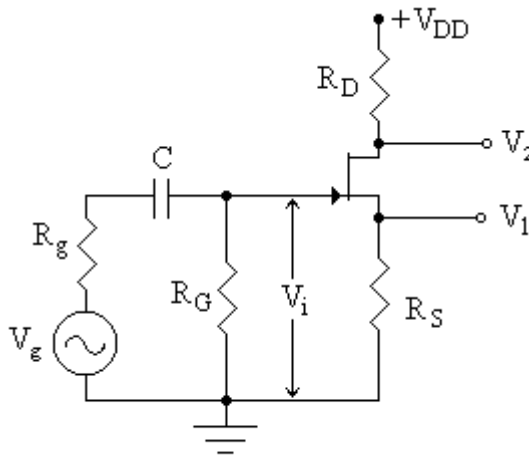
Izlazna otpornost je:

$$R_o = \frac{(R_S \parallel R_P)r_s}{R_S \parallel R_P + r_s} = 588 \Omega \quad (3.11.16)$$

3.12) Dizajnirati razdvajač faze pomoću JFET tranzistora na osnovu sledećih podataka:  $V_{DD} = 20 \text{ V}$ ,  $I_D = 3 \text{ mA}$ ,  $V_{GS} = 1.5 \text{ V}$ . Razdvajač faze se napaja iz generatora unutrašnje otpornosti od  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ .

Rešenje:

Na slici 3.12.1 je prikazana realizacija razdvajača faze pomoću JFET-a.



Slika 3.12.1

Pojačanje od ulaza do izlaza 1 je:

$$G_1 = \frac{V_1}{V_g} = \frac{V_1}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_g} \quad (3.12.1)$$

gde je:

$$V_i = \frac{R_G}{R_G + R_g} V_g \quad (3.12.2)$$

$$V_1 = I_d R_S = g_m V_{gs} R_S = g_m (V_i - V_1) R_S \quad (3.12.3)$$

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \quad (3.12.4)$$

Tada je:

$$G_1 = \frac{R_G}{R_G + R_g} \cdot \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \quad (3.12.5)$$

Pojačanje od ulaza do izlaza 2 je:

$$G_2 = \frac{V_2}{V_g} = \frac{V_2}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_g} = \frac{V_2}{V_{gs}} \cdot \frac{V_{gs}}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_g} \quad (3.12.6)$$

gde je:

$$V_2 = -I_d R_D = -g_m V_{gs} R_D \quad (3.12.7)$$

$$V_i = V_{gs} + I_d R_S = V_{gs} + g_m V_{gs} R_S = V_{gs} (1 + g_m R_S) \quad (3.12.8)$$

Tada je:

$$G_2 = -\frac{R_G}{R_G + R_g} \cdot \frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S} \quad (3.12.9)$$

Da bi  $G_1 = -G_2$ , iz jednačina (3.12.5) i (3.12.9) sledi je potrebno da  $R_C = R_E$ .

Kako je jednosmerna struja gejta veoma mala (reda nA),  $R_G$  treba da je veoma veliki. Stavimo  $R_G = 1 \text{ M}\Omega$ . Tada je:

$$V_{GS} = -V_S = -R_S I_D \quad (3.12.10)$$

odnosno:

$$R_S = -\frac{V_{GS}}{I_D} = 0.5 \text{ k}\Omega \quad (3.12.11)$$

3.13) Koristeći N - kanalni JFET koji se napaja iz izvora  $V_{DD} = 15 \text{ V}$  dizajnirati strujni izvor za potrošač  $R_P$  od:

a)  $I = 5 \text{ mA}$

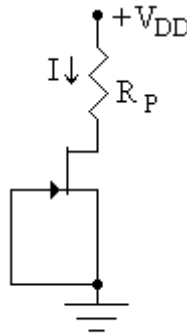
b)  $I = 2 \text{ mA}$

Poznato je:  $I_{DSS} = 5 \text{ mA}$ ,  $V_P = -4 \text{ V}$ . Odrediti opseg promene otpora potrošača u kome kolo ispravno radi.

Rešenje:

Da bi se JFET ponašao kao strujni izvor neophodno je obezbediti režim rada JFET - a u oblasti zasićenja ( $V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$ )

a) Kako je tražena struja jednaka struji  $I_{DSS}$ , JFET treba polarisati nultim naponom između gejta i sorsa. Realizacija strujnog izvora je prikazana na slici 3.13.1.



Slika 3.13.1

Struja kroz potrošač  $R_P$  je:

$$I = I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (3.13.1)$$

Kako je  $V_{GS} = 0$ , struja kroz potrošač je  $I = I_D = I_{DSS}$ . Napon između drejna i sorsa je:

$$V_{DS} = V_{DD} - IR_P \quad (3.13.2)$$

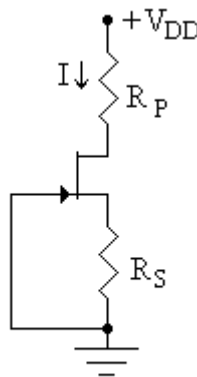
Maksimalna vrednost otpora potrošača  $R_P$  koji omogućava ispravni rad strujnog izvora određuje se iz uslova da je:

$$(V_{DS})_{\min} = V_{DD} - I(R_P)_{\max} = -V_P \quad (3.13.3)$$

odnosno:

$$(R_P)_{\max} = \frac{V_{DD} + V_P}{I} = 2.2 \text{ k}\Omega \quad (3.13.4)$$

b) Kako je struja  $I$  manja od struje  $I_{DSS}$  potrebno je obezbediti negativnu polarizaciju spoja gejt - sors. To se postiže stavljanjem otpornika  $R_S$  u sors tranzistora (slika 3.13.2).



Slika 3.13.2

Struja kroz potrošač  $R_P$  je:

$$I = I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 = I_{DSS} \left( 1 + \frac{IR_S}{V_P} \right)^2 \quad (3.13.5)$$

Tada je:

$$R_S = \frac{V_P}{I} \left( \sqrt{\frac{I}{I_{DSS}}} - 1 \right) = 735 \, \Omega \quad (3.13.6)$$

Sa slike 3.13.2 se vidi da je:

$$V_{DD} - IR_P - V_{DS} - IR_S = 0 \quad (3.13.7)$$

odnosno:

$$V_{DS} = V_{DD} - I(R_P + R_S) \quad (3.13.8)$$

Maksimalna vrednost otpora potrošača koji omogućava ispravni rad strujnog izvora određuje se iz uslova da je:

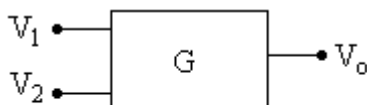
$$(V_{DS})_{\min} = V_{DD} - I[(R_P)_{\max} + R_S] = V_{GS} - V_P = -IR_S - V_P \quad (3.13.9)$$

odnosno:

$$(R_P)_{\max} = \frac{V_{DD} + V_P}{I} = 5.5 \, k\Omega \quad (3.13.10)$$

## 4. DIFERENCIJALNI POJAČAVAČ

Diferencijalni pojačavač je stepen koji služi da pojača razliku napona dva nezavisna pobudna generatora. Blok šema diferencijalnog pojačavača prikazana je na slici 1.



Slika 1

U idealnom slučaju kada su pojačanja od oba ulaza do izlaza međusobno jednaka, a suprotnog znaka, izlazni napon je:

$$V_o = GV_1 - GV_2 = G(V_1 - V_2)$$

Međutim, kod realnog diferencijalnog pojačavača, pojačanja merena između jednog ulaznog i izlaznog napona i drugog ulaznog i izlaznog napona nisu međusobno jednaka, odnosno izlazni napon ne zavisi samo od razlike ulaznih napona, već i od njihove apsolutne vrednosti. Prema tome, izlazni napon kod realnog diferencijalnog pojačavača je:

$$V_o = G_1V_1 - G_2V_2$$

Ako se ulazni naponi izraze preko napona razlike  $V_d = V_1 - V_2$  i napona srednje vrednosti  $V_s = \frac{V_1 + V_2}{2}$  tada je:

$$V_1 = V_s + \frac{1}{2}V_d$$

$$V_2 = V_s - \frac{1}{2}V_d$$

$$V_o = G_1V_1 - G_2V_2 = G_1\left(V_s + \frac{1}{2}V_d\right) - G_2\left(V_s - \frac{1}{2}V_d\right)$$

odnosno:

$$V_o = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)V_d + (G_1 - G_2)V_s = G_dV_d + G_sV_s$$

gde su:

$$G_d = \frac{G_1 + G_2}{2} - \text{diferencijalno pojačanje}$$

$$G_s = G_1 - G_2 - \text{pojačanje srednje vrednosti.}$$

Izlazni napon se može napisati i u obliku:

$$V_o = G_dV_d\left(1 + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{V_s}{V_d}\right)$$

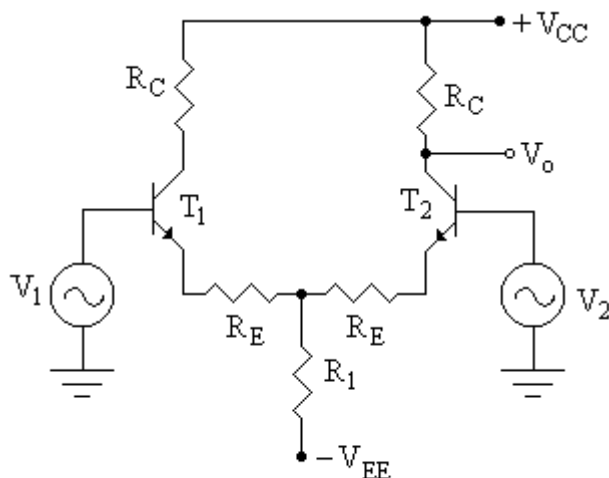
gde je  $\rho = \frac{G_d}{G_s}$  faktor potiskivanja napona srednje vrednosti i predstavlja

meru asimetrije diferencijalnog pojačavača. U idealnom slučaju kada je  $G_1 = G_2$ ,  $\rho$  teži beskonačnosti i pojačavač pojačava samo razliku ulaznih napona.

Diferencijalni pojačavač je ulazni stepen kod većine integrisanih pojačavača. Takođe se koristi kao ulazni stepen uređaja kod kojih dolazi slab signal zagađen šumom ( audio signali, radiofrekventni signali itd. ).



4.1) Za diferencijalni pojačavač sa slike 4.1 odrediti  $R_E$ ,  $R_C$  i  $R_1$ . Poznato je:  $V_{CC} = 15\text{ V}$ ,  $V_{EE} = 15\text{ V}$ , struja kolektora u mirnoj radnoj tački  $I_C = 0.5\text{ mA}$ , diferencijalno pojačanje  $G_d = 25$ , pojačanje srednje vrednosti  $|G_s| = 0.5$ . Smatrati da su tranzistori  $T_1$  i  $T_2$  identičnih karakteristika.



Slika 4.1

Rešenje:

Za naizmenični režim kolo sa slike 4.1 može se prikazati kolom na slici 4.1.1. Zbir naizmeničnih napona po konturi baza – emitor daje:

$$V_1 - (R_E + r_e)I_{e1} - R_1(I_{e1} + I_{e2}) = 0 \quad (4.1.1)$$

$$V_2 - (R_E + r_e)I_{e2} - R_1(I_{e1} + I_{e2}) = 0 \quad (4.1.2)$$

gde je  $r_e = \frac{V_T}{I_C}$  emitorski otpor i na sobnoj temperaturi je  $r_e = 50\Omega$ .

Sabiranjem i oduzimanjem jednačina (4.1.1) i (4.1.2) dobija se:

$$V_1 + V_2 = (2R_1 + R_E + r_e)(I_{e1} + I_{e2}) \quad (4.1.3)$$

$$V_1 - V_2 = (R_E + r_e)(I_{e1} - I_{e2}) \quad (4.1.4)$$

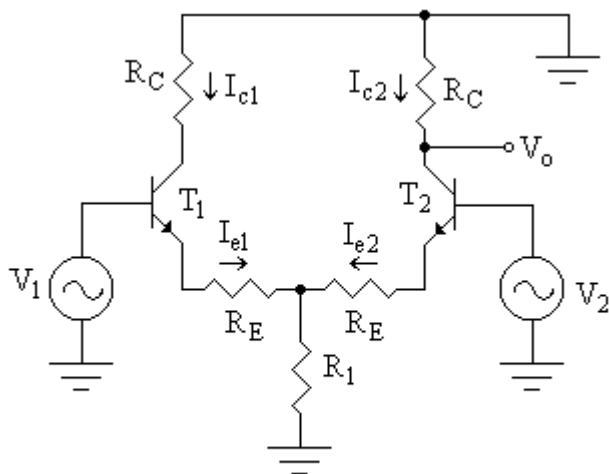
odnosno:

$$\frac{V_1 + V_2}{2R_1 + R_E + r_e} = I_{e1} + I_{e2} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{R_E + r_e} = I_{e1} - I_{e2} \quad (4.1.6)$$

Iz jednačina (4.1.5) i (4.1.6) sledi da je:

$$\frac{V_1 + V_2}{2R_1 + R_E + r_e} - \frac{V_1 - V_2}{R_E + r_e} = 2I_{e2} \quad (4.1.7)$$



Slika 4.1.1

Sa slike 4.1.1 se vidi da je izlazni napon  $V_o$ :

$$\begin{aligned} V_o &= -R_C I_{c2} \cong -R_C I_{e2} = \\ &= \frac{R_C}{2(R_E + r_e)} (V_1 - V_2) - \frac{R_C}{2R_1 + R_E + r_e} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

odnosno:

$$V_o = G_d V_d + G_s V_s \quad (4.1.9)$$

gde su:

$$G_d = \frac{R_C}{2(R_E + r_e)} \quad (4.1.10)$$

$$G_s = -\frac{R_C}{2R_1 + R_E + r_e} \quad (4.1.11)$$

Jednosmerni napon na kolektoru tranzistora  $T_2$  treba postaviti na polovini napona napajanja:

$$V_{C2} = \frac{V_{CC}}{2} = V_{CC} - R_C I_C \quad (4.1.12)$$

Tada je :

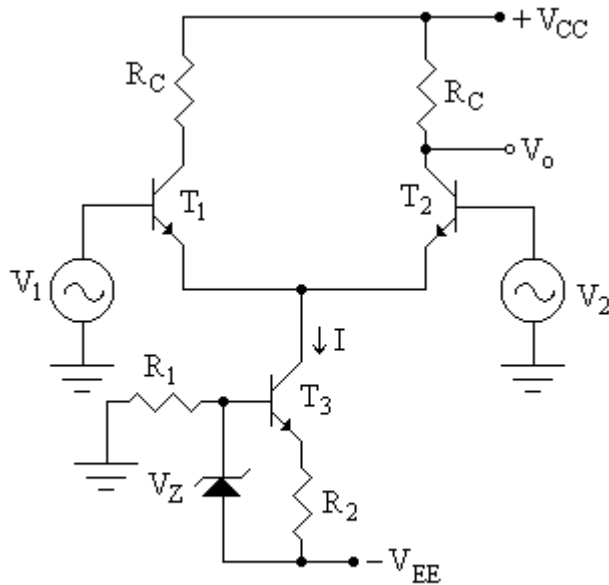
$$R_C = \frac{V_{CC}}{2I_C} = 15\text{K}\Omega \quad (4.1.13)$$

$$R_E = \frac{R_C}{2G_d} - r_e = 250\Omega \quad (4.1.14)$$

$$R_1 = \frac{R_C - |G_s|(R_E + r_e)}{2|G_s|} = 14.8\text{k}\Omega \quad (4.1.15)$$

Kako diferencijalno i pojačanje srednje vrednosti ne zavise od kolektorskog otpora tranzistora  $T_1$ , on se može izostaviti.

4.2) Za diferencijalni pojačavač sa slike 4.2 odrediti diferencijalno pojačanje  $G_d$  i pojačanje srednje vrednosti  $G_s$ . Poznato je:  $V_{CC} = 15\text{ V}$ ,  $V_{EE} = 15\text{ V}$ ,  $V_Z = 1.2\text{ V}$ ,  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $V_{BE} = 0.6\text{ V}$ ,  $\beta = 100$ . Smatrati da su tranzistori  $T_1$  i  $T_2$  identičnih karakteristika.



Slika 4.2

Rešenje:

Kako je diferencijalni pojačavač simetričan važi:

$$I_{E1} = I_{E2} = \frac{I}{2} \quad (4.2.1)$$

Napon na bazi tranzistora  $T_3$  je  $V_{B3} = -V_{EE} + V_Z = -13.8V$ . Tada je:

$$V_{E3} = V_{B3} - V_{BE} = -14.4V \quad (4.2.2)$$

$$I_{E3} = \frac{V_{E3} - (-V_{EE})}{R_2} = 0.6mA \quad (4.2.3)$$

$$I_{E1} = \frac{I}{2} \cong \frac{I_{E3}}{2} \quad (4.2.4)$$

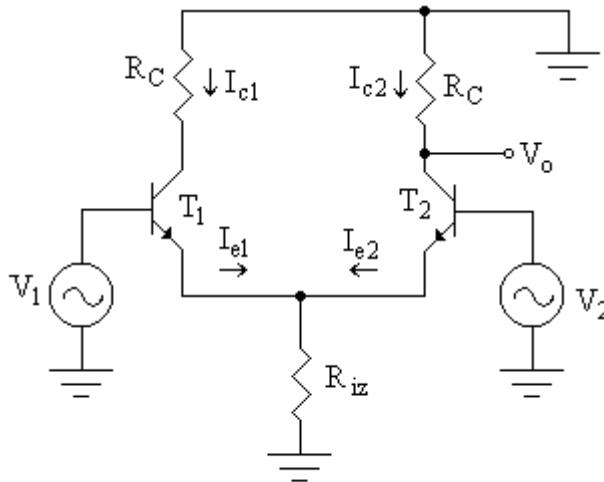
Jednosmerni napon na kolektoru tranzistora  $T_2$  treba postaviti na polovini napona napajanja:

$$V_{C2} = \frac{V_{CC}}{2} = 7.5V \quad (4.2.5)$$

Tada je:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{C2}}{I_{C1}} \cong \frac{V_{CC} - V_{C2}}{I_{E1}} = 25k\Omega \quad (4.2.6)$$

Za naizmenični režim kolo sa slike 4.2 može se prikazati kolom na slici 4.2.1, gde je  $R_{iz}$  – otpornost strujnog izvora.



Slika 4.2.1

Zbir naizmeničnih napona po konturi baza – emitor daje:

$$V_1 = r_e I_{e1} + R_{iz}(I_{e1} + I_{e2}) \quad (4.2.7)$$

$$V_2 = r_e I_{e2} + R_{iz}(I_{e1} + I_{e2}) \quad (4.2.8)$$

gde je  $r_e = \frac{V_T}{I_C} \cong 83\Omega$

Sabiranjem i oduzimanjem jednačina (4.2.7) i (4.2.8) dobija se:

$$\frac{V_1 + V_2}{r_e + 2R_{iz}} = I_{e1} + I_{e2} \quad (4.2.9)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{r_e} = I_{e1} - I_{e2} \quad (4.2.10)$$

Iz jednačina (4.2.9) i (4.2.10) sledi da je:

$$I_{e2} = \frac{V_1 + V_2}{2(r_e + 2R_{iz})} - \frac{V_1 - V_2}{2r_e} \quad (4.2.11)$$

Izlazni napon  $V_o$  je:

$$V_o = -R_C I_{c2} \cong -R_C I_{e2} = \frac{R_C}{2r_e} (V_1 - V_2) - \frac{R_C}{r_e + 2R_{iz}} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (4.2.12)$$

odnosno:

$$V_i = G_d V_d + G_s V_s \quad (4.2.13)$$

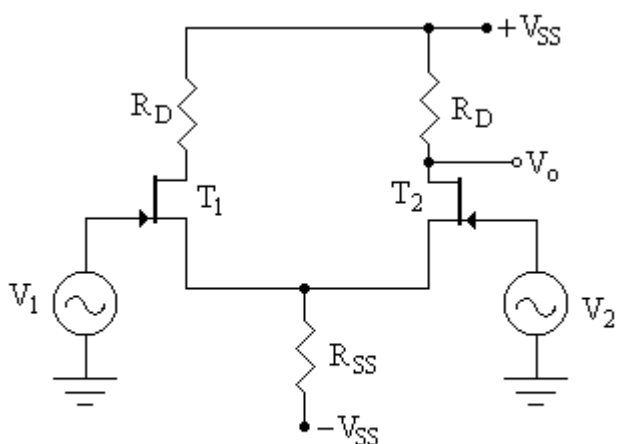
gde su:

$$G_d = \frac{R_C}{2r_e} = 150.6 \quad (4.2.14)$$

$$G_s = -\frac{R_C}{r_e + 2R_{iz}} \quad (4.2.15)$$

Kada je otpornost strujnog izvora veoma velika ( $R_{iz} \rightarrow \infty$ ), pojačanje srednje vrednosti je veoma malo ( $G_s \rightarrow 0$ ).

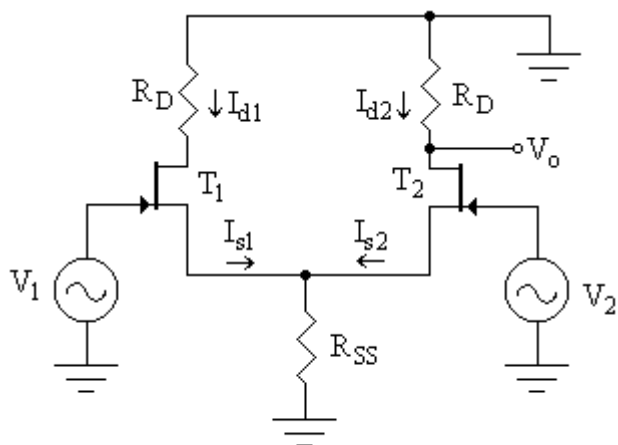
4.3) Za diferencijalni pojačavač sa JFET tranzistorima sa slike 4.3 odrediti diferencijalno pojačanje  $G_d$ , pojačanje srednje vrednosti  $G_s$  i faktor potiskivanja napona srednje vrednosti  $\rho$ . Poznato je:  $V_{DD} = 15 \text{ V}$ ,  $V_{SS} = 15 \text{ V}$ ,  $V_P = -2 \text{ V}$ ,  $I_{DSS} = 2 \text{ mA}$ ,  $R_D = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{SS} = 20 \text{ k}\Omega$ . Smatrati da su tranzistori identičnih karakteristika.



Slika 4.3

Rešenje:

Za naizmenični režim rada kolo sa slike 4.3 može se prikazati kolom na slici 4.3.1.



Slika 4.3.1

Zbir naizmeničnih napona po konturi gejt – sors daje:

$$V_1 - V_{gs1} - R_{SS}(I_{s1} + I_{s2}) = 0 \quad (4.3.1)$$

$$V_2 - V_{gs2} - R_{SS}(I_{s1} + I_{s2}) = 0 \quad (4.3.2)$$

gde su:

$$I_{s1} = g_m V_{gs1} \quad (4.3.3)$$

$$I_{s2} = g_m V_{gs2} \quad (4.3.4)$$

Tada je:

$$V_1 = V_{gs1}(1 + g_m R_{SS}) + g_m R_{SS} V_{gs2} \quad (4.3.5)$$

$$V_2 = V_{gs2}(1 + g_m R_{SS}) + g_m R_{SS} V_{gs1} \quad (4.3.6)$$

Sabiranjem i oduzimanjem jednačina (4.3.5) i (4.3.6) dobija se:

$$V_1 + V_2 = (1 + 2g_m R_{SS})(V_{gs1} + V_{gs2}) \quad (4.3.7)$$

$$V_1 - V_2 = V_{gs1} - V_{gs2} \quad (4.3.8)$$

Iz jednačina (4.3.7) i (4.3.8) dobija se:

$$V_{gs2} = -\frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1 + V_2}{2(1 + 2g_m R_{SS})} \quad (4.3.9)$$

Izlazni napon  $V_o$  je:

$$V_i = -R_D I_{d2} \cong -R_D I_{s2} = -R_D g_m V_{gs2} \quad (4.3.10)$$

odnosno:

$$V_i = \frac{g_m R_D}{2} (V_1 - V_2) - \frac{g_m R_D}{1 + 2g_m R_{SS}} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (4.3.11)$$

$$V_i = G_d V_d + G_s V_s \quad (4.3.12)$$

gde su:

$$G_d = \frac{g_m R_D}{2} \quad (4.3.13)$$



$$G_s = -\frac{g_m R_D}{1 + 2g_m R_{SS}} \quad (4.3.14)$$

Zbir jednosmernih napona po konturi gejt – sors daje:

$$V_{GS} + 2R_{SS}I_D - V_{SS} = 0 \quad (4.3.15)$$

Jednosmerna struja drejna data je jednačinom:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (4.3.16)$$

Iz jednačina (4.3.15) i (4.3.16) sledi da je:

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 + \frac{2R_{SS}I_D - V_{SS}}{V_P} \right)^2 \quad (4.3.17)$$

odnosno:

$$\frac{4R_{SS}^2}{V_P^2} I_D^2 + \left[ \frac{4R_{SS}}{V_P} \left( 1 - \frac{V_{SS}}{V_P} \right) - \frac{1}{I_{DSS}} \right] I_D + \left( 1 - \frac{V_{SS}}{V_P} \right)^2 = 0 \quad (4.3.18)$$

Rešenja kvadratne jednačine 4.3.18 su:

$$I_{D1} = 0.4 \text{ mA} \text{ i } I_{D2} = 0.45 \text{ mA.}$$

Tada je:

$$V_{GS1} = V_{SS} - 2R_{SS}I_{D1} = -1.16 \text{ V}$$

$$V_{GS2} = V_{SS} - 2R_{SS}I_{D2} = -2.96 \text{ V} < V_P$$

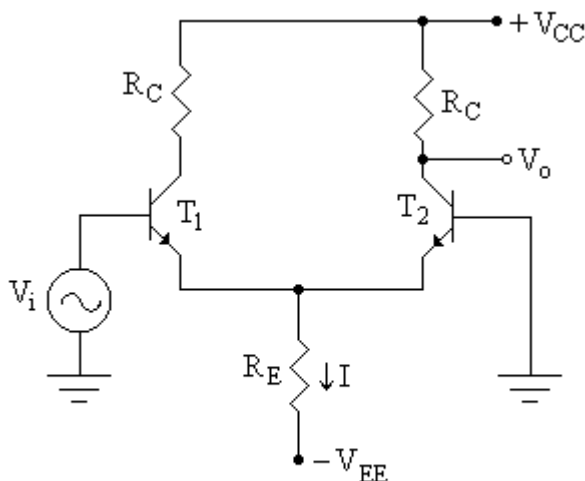
Za struja  $I_{D2}$  JFET nije u zasićenju i ovo rešenje otpada. Prema tome:

$$I_D = 0.4 \text{ mA}$$

$$g_m = \frac{2}{|V_P|} \sqrt{I_D I_{DSS}} = 0.894 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$$

$$G_d = 4.47, G_d = -0.25 \text{ i } \rho = \frac{G_d}{G_s} = 17.88$$

4.5) Za diferencijalni pojačavač sa slike 4.5 odrediti naponsko pojačanje. Poznato je:  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,  $V_{EE} = 15 \text{ V}$ ,  $I_C = 0.5 \text{ mA}$ . Smatrati da su tranzistori identičnih karakteristi .



Slika 4.5

Rešenje:

Zbir naizmeničnih napona po konturi baza – emitor daje:

$$r_e I_{e1} + R_E (I_{e1} + I_{e2}) = V_i \quad (4.5.1)$$

$$r_e I_{e2} + R_E (I_{e1} + I_{e2}) = 0 \quad (4.5.2)$$

Iz jednačina (4.5.1) i (4.5.2) se dobija :

$$I_{e2} = -\frac{R_E}{2r_e R_E + r_e^2} V_i \quad (4.5.3)$$

Izlazni napon je:

$$V_o = -R_C I_{c2} \cong -R_C I_{e2} = \frac{R_E R_C}{2r_e R_E + r_e^2} V_i \quad (4.5.4)$$

Jednosmerni napon na kolektoru tranzistora treba postaviti na polovinu napona napajanja:

$$V_{C2} = \frac{V_{CC}}{2} \quad (4.5.5)$$

Tada je:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{C2}}{I_{C2}} = 15\text{k}\Omega \quad (4.5.6)$$

Sa slike 4.5 se vidi da za jednosmerni režim važi:

$$I_{E1} + I_{E2} = I \quad (4.5.7)$$

Kako je kolo simetrično važi:

$$\frac{I}{2} = I_{E1} = I_{E2} \cong I_{C2} \quad (4.5.8)$$

Zbir jednosmernih napona po konturi baza – emitor daje:

$$-V_{BE} - R_E I + V_{EE} = 0 \quad (4.5.9)$$

Tada je:

$$R_E = \frac{V_{EE} - V_{BE}}{I} = 14.4\text{k}\Omega \quad (4.5.10)$$

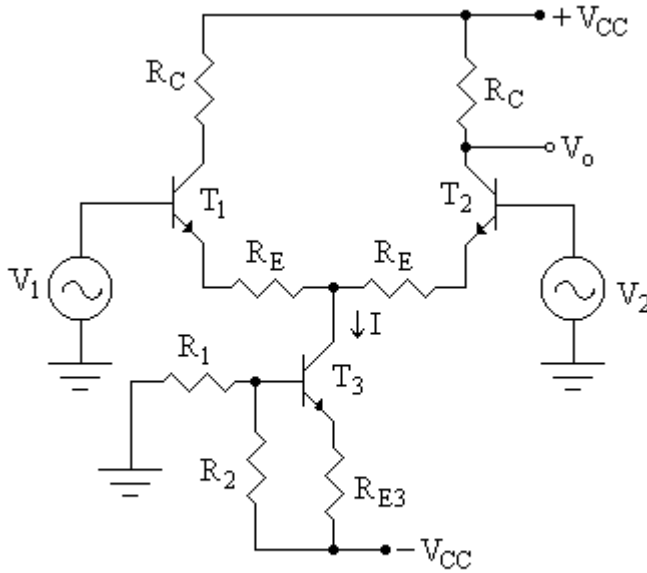
Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_E R_C}{2r_e R_E + r_e^2} = 150 \quad (4.5.11)$$

4.6) Dizajnirati diferencijalni pojačavač sa strujnim izvorom od 1 mA, koji ima diferencijalno pojačanje  $G_d = 50$ . Smatrati da su upotrebljeni tranzistori identičnih karakteristika. Poznato je:  $V_{CC} = 15\text{ V}$ ,  $V_{BE} = 0.6\text{ V}$ ,  $\beta = 100$ .

Rešenje:

Na slici 4.6.1 prikazana je realizacija diferencijalnog pojačavača sa strujnim izvorom od 1 mA koji je realizovan pomoću tranzistora  $T_3$ .



Slika 4.6.1

Sa slika 4.6.1 se vidi da je:

$$I = I_{C3} \cong I_{E3} = \frac{V_{E3} - (-V_{CC})}{R_{E3}} \quad (4.6.1)$$

$$V_{E3} = V_{B3} - V_{BE} \quad (4.6.2)$$

Napon  $V_{B3}$  određen je otpornicima  $R_1$  i  $R_2$ . Otpornike  $R_1$  i  $R_2$  treba odabrati da jednosmerna struja baze bude mnogo manja od struje kroz razdelnik napona određenog ovim otpornicima (barem 10 puta). Tada je :

$$\frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} \cong 10I_B = 10 \frac{I}{\beta} = \frac{I}{10} \quad (4.6.3)$$

Jednosmerni napon na bazi je:

$$V_{B3} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (4.6.4)$$

Neka je napon  $V_{E3} = -11$  V. Tada iz jednačine (4.6.2) sledi da je  $V_{B3} = -10.4$  V, iz jednačine (4.6.1) da je  $R_{E3} = 4$  k $\Omega$ , dok iz jednačina (4.6.3) i (4.6.4) da su  $R_1 = 104$  k $\Omega$  i  $R_2 = 46$  k $\Omega$ .

Jednosmerni napon na kolektoru tranzistora  $T_2$  treba postaviti na polovini napona napajanja:

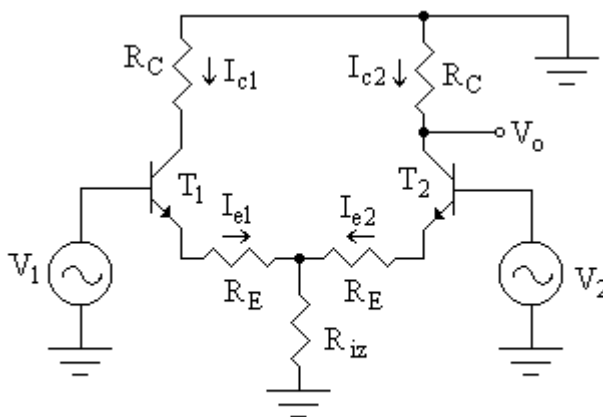
$$V_{C2} = \frac{V_{CC}}{2} = V_{CC} - R_C I_{C2} \quad (4.6.5)$$

Kako je diferencijalni pojačavač simetričan važi:

$$I_{E1} = I_{E2} = \frac{I}{2} \quad (4.6.6)$$

Tada je:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{C2}}{I_{C2}} \cong \frac{V_{CC} - V_{C2}}{I_{E2}} = 15\text{k}\Omega \quad (4.6.7)$$



Slika 4.6.2

Za naizmenični režim kolo sa slike 4.6.1 može se prikazati kolom na slici 4.6.2, gde je  $R_{iz}$  – otpornost strujnog izvora.

Zbir naizmeničnih napona po konturi baza – emitor daje:

$$V_1 = (r_e + R_E)I_{e1} + R_{iz}(I_{e1} + I_{e2}) \quad (4.6.8)$$

$$V_2 = (r_e + R_E)I_{e2} + R_{iz}(I_{e1} + I_{e2}) \quad (4.6.9)$$

gde je  $r_e = \frac{V_T}{I_C} \cong 50\Omega$

Iz jednačina (4.6.8) i (4.6.9) sledi da je:

$$I_{e2} = \frac{V_1 + V_2}{2(r_e + R_E + 2R_{iz})} - \frac{V_1 - V_2}{2(r_e + R_E)} \quad (4.6.10)$$

Izlazni napon  $V_o$  je:

$$V_o \cong -R_C I_{e2} = \frac{R_C}{2(r_e + R_E)}(V_1 - V_2) - \frac{R_C}{r_e + R_E + 2R_{iz}} \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (4.6.11)$$

odnosno:

$$V_i = G_d V_d + G_s V_s \quad (4.6.12)$$

gde su:

$$G_d = \frac{R_C}{2(r_e + R_E)} \quad (4.6.13)$$

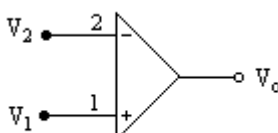
$$G_s = -\frac{R_C}{r_e + R_E + 2R_{iz}} \quad (4.6.14)$$

Iz jednačine (4.6.13) sledi da je:

$$R_E = \frac{R_C}{2G_d} - r_e = 100\Omega \quad (4.6.15)$$

## 5. OPERACIONI POJAČAVAČ

Operacioni pojačavač je vrsta pojačavača čiji je simbol prikazan na slici 1.



Slika 1

Znak “+” na ulazu 1 označava da je izlazni napon  $V_o$  u fazi sa ulaznim naponom  $V_1$  i naziva se neinvertujući ulaz. Znak “-” na ulazu 2 označava da je izlazni napon  $V_o$  fazno pomeren za  $\pi$  u odnosu na ulazni napon  $V_2$  i naziva se invertujući ulaz..

Operacioni pojačavač je višestepeni pojačavač. Ulazni stepen operacionog pojačavača je diferencijalni pojačavač koji treba da obezbedi veliko pojačanje za diferencijalni signal  $V_d = V_1 - V_2$ , a što manje da pojača signal srednje vrednosti. Ulazni stepen takođe treba da obezbedi veliku ulaznu otpornost, malu ulaznu struju i mali strujni ofset i naponski drift.

Međustepen treba da obezbedi potrebno naponsko i strujno pojačanje. Takođe jednosmerni nivo signala sa izlaza diferencijalnog pojačavača svodi na potrebnu vrednost kojim se obezbeđuje nulti jednosmerni nivo na izlazu operacionog pojačavača kada je ulazni signal nula. Izlazni stepen se gradi kao pojačavač snage i treba da obezbedi malu izlaznu otpornost.

Neki od osnovnih parametara koji se definišu kod operacionog pojačavača su:

- Pojačanje pojačavača u otvorenoj petlji  $G_o = \frac{V_o}{V_1 - V_2}$
- Ulazna otpornost  $R_i$
- Izlazna otpornost  $R_o$
- Propusni opseg

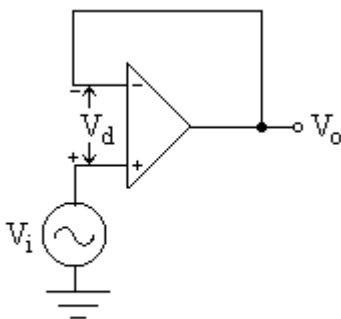
Idealni operacioni pojačavač ima beskonačno pojačanje  $G_o$ , beskonačnu ulaznu otpornost, nultu izlaznu otpornost i beskonačno širok propusni opseg. Savremeni operacioni pojačavači imaju približno takve karakteristika i često se pri analizi kola zamenjuju idealnim modelom.



5.1) Za kolo sa slike 5.1 izračunati naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$  ako je

upotrebljen:

- a) idealni operacioni pojačavač
- b) operacioni pojačavač koji ima konačno pojačanje  $G_o$



Slika 5.1

Rešenje:

a) Kako za idealni operacioni pojačavač važi da  $G_o \rightarrow \infty$ , diferencijalni napon  $V_d$  je:

$$V_d = \frac{V_o}{G_o} = 0 \quad (5.1.1)$$

Sa slike 5.1 se vidi da je:

$$V_i = V_o \quad (5.1.2)$$

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = 1 \quad (5.1.3)$$

b) Ako je  $G_o$  konačno, tada je:

$$V_d = \frac{V_o}{G_o} \quad (5.1.4)$$

Sa slike 5.1 se vidi da je:

$$V_o = V_i - V_d = V_i - \frac{V_o}{G_o} \quad (5.1.5)$$

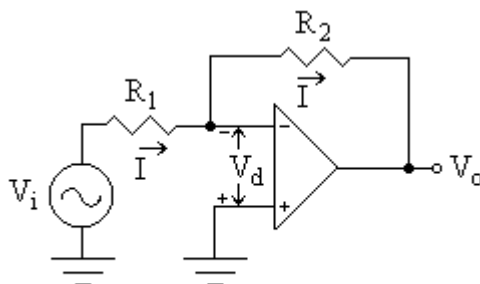
Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{G_o}} \quad (5.1.6)$$

Kako je pojačanje  $G_o$  kod savremenih operacionih pojačavača veoma veliko (reda  $10^7$ ), naponsko pojačanje  $G \cong 1$ , a ulazna otpornost vrlo velika, ovaj pojačavač je odličan razdvojni stepen.

5.2) Za kolo invertujućeg operacionog pojačavača sa slike 5.2 izračunati naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$  ako je upotrebljen:

- a) idealni operacioni pojačavač
- b) operacioni pojačavač koji ima konačno pojačanje  $G_o$



Slika 5.2

Rešenje:

a) Kako je  $V_d = \frac{V_o}{G_o} = 0$  i neinvertujući ulaz vezan za masu, tada je i

invertujući ulaz na masi. Sa slike 5.2 se vidi da je:

$$V_i = IR_1 \quad (5.2.1)$$

$$V_o = -IR_2 \quad (5.2.2)$$

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (5.2.3)$$

b) Ako je pojačanje  $G_o$  konačno, tada je  $V_d = \frac{V_o}{G_o}$  i prema slici 5.2 je:

$$V_i + V_d = IR_1 \quad (5.2.4)$$

$$V_d + V_o = -IR_2 \quad (5.2.5)$$

$$\frac{V_i + V_d}{R_1} = -\frac{V_d + V_o}{R_2} \quad (5.2.6)$$

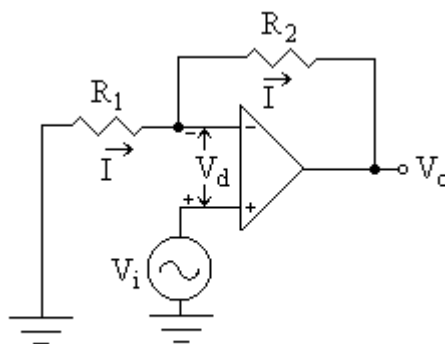
Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{G_o} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (5.2.7)$$

Jednačina (5.2.7) se svodi na jednačinu (5.2.3) kada  $G_o \rightarrow \infty$ . Pojačanje  $G$  je negativno (zato se i naziva invertujući pojačavač) i zavisi od odnosa otpornika  $R_1$  i  $R_2$ .

5.3) Za kolo neinvertujućeg operacionog pojačavača sa slike 5.3 izračunati naponsko pojačanje  $G = \frac{V_o}{V_i}$  ako je upotrebljen:

- a) idealni operacioni pojačavač
- b) operacioni pojačavač koji ima konačno pojačanje  $G_o$



Slika 5.3

Rešenje:

a) Kako je  $V_d = \frac{V_o}{G_o} = 0$ , a na neinvertujućem ulazu je naponu  $V_i$ , tada

je i na invertujućem ulazu napon  $V_i$ . Sa slike 5.3 se vidi da je:

$$V_i = -IR_1 \tag{5.3.1}$$

$$V_i - V_o = IR_2 \tag{5.3.2}$$

$$\frac{V_i - V_o}{R_2} = -\frac{V_i}{R_1} \tag{5.3.3}$$

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \tag{5.3.4}$$

b) Ako je pojačanje konačno, tada je  $V_d = \frac{V_o}{G_o}$  i prema slici 5.3 je:

$$V_i - V_d = -IR_1 \quad (5.3.5)$$

$$V_i - V_d - V_o = IR_2 \quad (5.3.6)$$

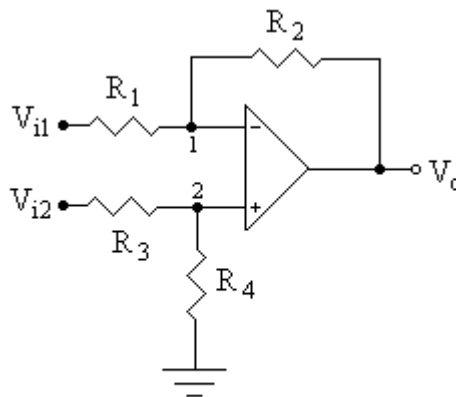
$$\frac{V_i - V_d}{R_1} = \frac{V_o - (V_i - V_d)}{R_2} \quad (5.3.7)$$

Naponsko pojačanje je:

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\frac{1}{G_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad (5.3.8)$$

Jednačina (5.3.8) se svodi na jednačinu (5.3.4) kada  $G_o \rightarrow \infty$ . Pojačanje  $G$  je pozitivno (zato se i naziva neinvertujući pojačavač) i zavisi od odnosa otpornika  $R_1$  i  $R_2$ .

5.4) Za kolo sa idealnim operacionim pojačavačem sa slike 5.4 izračunati izlazni napon  $V_o$ . Ispitati slučaj kada je:  $R_1 = R_3$  i  $R_2 = R_4$ .



Slika 5.4

Rešenje:

Izlazni napon može se naći principom superpozicije. Izlazni napon je:

$$V_o = V_o |_{V_{i1}=0} + V_o |_{V_{i2}=0} \quad (5.4.1)$$

Kako je operacioni pojačavač idealan, napon u čvoru 1 jednak je naponu u čvoru 2.

Za  $V_{i1} = 0$  napon u čvoru 2 je:

$$V_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{i2} \quad (5.4.2)$$

Pojačavač sa slike 5.4 u ovom slučaju ponaša se kao neinvertujući operacioni pojačavač sa pojačanjem:

$$V_o |_{V_{i1}=0} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{i2} \quad (5.4.3)$$

Za  $V_{i2} = 0$  napon u čvoru 2 je  $V_2 = 0$ . Pojačavač sa slike 5.4 u ovom slučaju ponaša se kao invertujući operacioni pojačavač sa pojačanjem:

$$V_o |_{V_{i2}=0} = -\frac{R_2}{R_1} V_{i1} \quad (5.4.4)$$

Izlazni napon je:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{i2} - \frac{R_2}{R_1} V_{i1} \quad (5.4.5)$$

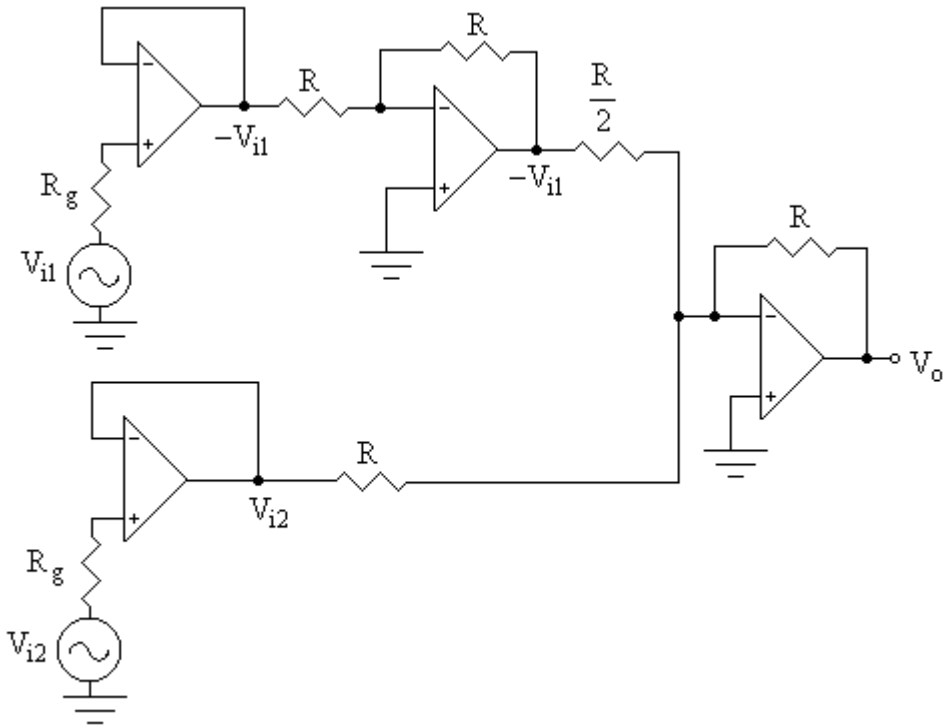
Za  $R_1 = R_3$  i  $R_2 = R_4$  izlazni napon je:

$$V_o = \frac{R_2}{R_1} (V_{i2} - V_{i1}) \quad (5.4.6)$$

5.5) Dizajnirati kolo sa idealnim operacionom pojačavačima koje će realizovati sledeću sumu ulaznih napona:  $V_o = 2V_{i1} - V_{i2}$ . Omogućiti da se kolo pobuđuje izvorima sa velikom unutrašnjom otpornošću  $R_g$ .

Rešenje:

Na slici 5.5 je prikazana realizacija kola.



Slika 5.5

Sa slike 5.5 se vidi da je izlazni napon:

$$V_o = -\frac{R}{R}(-V_{i1}) - \frac{R}{R}V_{i2} = 2V_{i1} - V_{i2} \quad (5.5.1)$$

5.6) Dizajnirati Šmitovo okidno kolo pomoću idealnog operacionog pojačavača ako se:

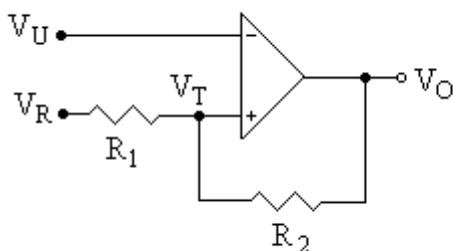
- a) okidanje vrši na invertujućem ulazu;
- b) okidanje vrši na neinvertujućem ulazu;

Izlazne nivoe postaviti na  $V_{OL} = 0$  i  $V_{OH} = 5$  V sa širinom histerezisa  $V_H = 0.2$  V i sa centrom histerezisa na  $V_{CH} = 2.5$  V. Na raspolaganju je baterija od  $V_B = 5$  V.

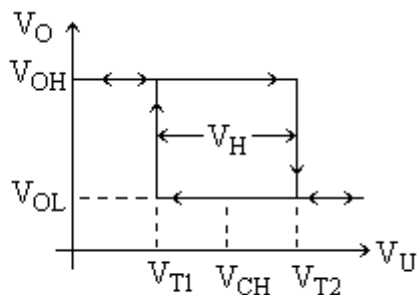
Rešenje:

Šmitovo okidno kolo služi za poređenje pobudnog napona sa referentnim naponom. Svaki put kada pobudni napon dostigne referentni Šmitovo okidno kolo menja stanje na izlazu.

a) Na slici 5.6.1 prikazano je Šmitovo okidno kolo sa idealnim operacionim pojačavačem kod koga se vrši okidanje na invertujućem ulazu.



Slika 5.6.1



Slika 5.6.2

Nivoi ulaznog napona pri kojima nastaju promene na izlazu pojačavača određeni su vrednošću napona  $V_T = V_U$ . Sa kola sa slike 5.6.1 se vidi da je:

$$\frac{V_R - V_T}{R_1} = \frac{V_T - V_O}{R_2} \quad (5.6.1)$$

odnosno:

$$V_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_R + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_O \quad (5.6.2)$$



Karakteristika prenosa kola sa slike 5.6.1 prikazana je na slici 5.6.2. Referentni naponi  $V_{T1}$  i  $V_{T2}$  nazivaju se naponi okidanja. Zbog sličnosti sa karakteristikama magnetnih materijala, karakteristika prenosa Šmitovog kola naziva se histerezisna petlja, odnosno histerezis.

Niži naponski nivo okidanja Šmitovog okidnog kola je:

$$V_{T1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_R + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{OL} \quad (5.6.3)$$

Viši naponski nivo okidanja Šmitovog okidnog kola je:

$$V_{T2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_R + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{OH} \quad (5.6.4)$$

Razlika naponskih nivoa okidanja čine širinu histerezisa Šmitovog okidnog kola:

$$V_H = V_{T2} - V_{T1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (V_{OH} - V_{OL}) \quad (5.6.5)$$

Centar histerezisa je:

$$V_{CH} = \frac{V_{T1} + V_{T2}}{2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_R + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} (V_{OH} + V_{OL}) \quad (5.6.6)$$

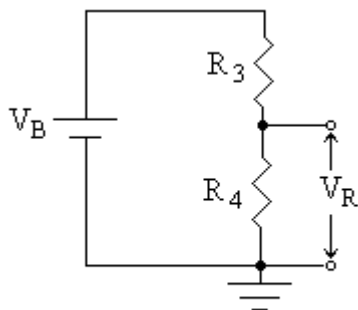
Kako je  $V_{OL} = 0$  V i  $V_{OH} = 5$  V, iz jednačine (5.6.5) sledi da je:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{V_H}{V_{OH}} = \frac{1}{25} \quad (5.6.7)$$

odnosno  $\frac{R_2}{R_1} = 24$ . Iz jednačine (5.6.6) sledi da je:

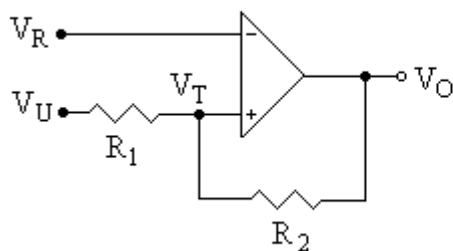
$$V_R = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{CH} - \frac{R_1}{2R_2} V_{OH} = 2.5V \quad (5.6.8)$$

Ako se uzme da je  $R_1 = 100 \Omega$ , tada je  $R_2 = 2.4 \text{ k}\Omega$ . Kako je na raspolaganju baterija od 5 V, referentni napon može se realizovati preko razdelnika napona prikazanim na slici 5.6.3 ( $R_3 = R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ ).

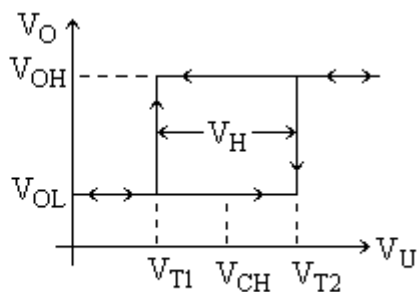


Slika 5.6.3

b) Na slici 5.6.4 prikazano je Šmitovo okidno kolo kod koga se okidanje vrši okidanje na neinvertujućem ulazu, a na slici 5.6.5 njegoa histerezisna petlja.



Slika 5.6.4



Slika 5.6.5

Nivoi ulaznog napona  $V_T = V_U$ , pri kojima nastaju promene na izlazu pojačavača, određeni su vrednošću napona  $V_R$ . Sa kola sa slike 5.6.4 vidi se da je:

$$\frac{V_T - V_R}{R_1} = \frac{V_R - V_O}{R_2} \quad (5.6.9)$$

odnosno:

$$V_T = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_R - \frac{R_1}{R_2} V_O \quad (5.6.10)$$

Niži naponski nivo okidanja Šmitovog okidnog kola je:

$$V_{T1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_R - \frac{R_1}{R_2} V_{OH} \quad (5.6.11)$$

Viši naponski nivo okidanja Šmitovog okidnog kola je:

$$V_{T2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_R - \frac{R_1}{R_2} V_{OL} \quad (5.6.12)$$

Širina histerezisa Šmitovog okidnog kola je:

$$V_H = V_{T2} - V_{T1} = \frac{R_1}{R_2} (V_{OH} - V_{OL}) \quad (5.6.13)$$

Centar histerezisa je:

$$V_{CH} = \frac{V_{T1} + V_{T2}}{2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_R - \frac{R_1}{2R_2} (V_{OH} + V_{OL}) \quad (5.6.14)$$

Kako je  $V_{OL} = 0V$  i  $V_{OH} = 5V$  iz jednačine (5.6.13) sledi da je:

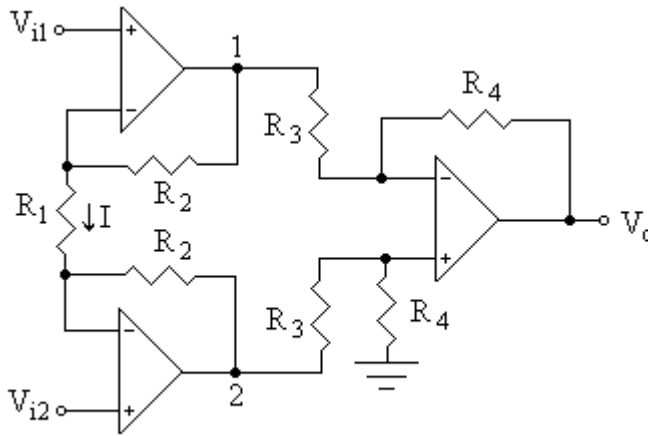
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{V_H}{V_{OH}} = 0.04 \quad (5.6.15)$$

Tada iz jednačine (5.6.14) sledi da je:

$$V_R = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} V_{OH} = 2.5V \quad (5.6.16)$$

Ako se uzme da je  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ , tada iz jednačine (5.6.15) sledi da je  $R_1 = 400 \Omega$ .

5.7) Izračunati izlazni napon  $V_o$  u kolu sa slike 5.7. Smatrati da su upotrebljeni operacioni pojačavači idealni.



Slika 5.7

Rešenje:

Struja kroz otpornik  $R_1$  je:

$$I = \frac{V_{i1} - V_{i2}}{R_1} \quad (5.7.1)$$

Napon  $V_1$  u čvoru 1 je:

$$V_1 = V_{i1} + IR_2 = V_{i1} + \frac{R_2}{R_1}(V_{i1} - V_{i2}) = V_{i1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - V_{i2} \frac{R_2}{R_1} \quad (5.7.2)$$

Napon  $V_2$  u čvoru 2 je:

$$V_2 = V_{i2} - IR_2 = V_{i2} - \frac{R_2}{R_1}(V_{i1} - V_{i2}) = V_{i2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - V_{i1} \frac{R_2}{R_1} \quad (5.7.3)$$

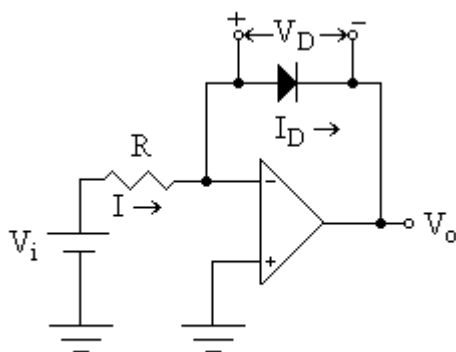
Izlazni napon je:

$$V_o = \frac{R_4}{R_3}(V_2 - V_1) = \left(1 + 2 \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{R_4}{R_3}(V_{i2} - V_{i1}) \quad (5.7.4)$$

5.8) Dizajnirati logaritamski operacioni pojačavač.

Rešenje:

Kod logaritamskog operacionog pojačavača izlazni napon proporcionalan je logaritmu ulaznog napona. Da bi se pomoću operacionog pojačavača ostvario logaritamski pojačavač, potrebno je imati element koji ima logaritamsku karakteristiku, a to su diode i bipolarni tranzistori. Na slici 5.8.1 prikazana je realizacija logaritamskog pojačavača pomoću diode.



Slika 5.8.1

Pri direktnoj polarizaciji struja kroz diodu je:

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right) \quad (5.8.1)$$

Ako je inverzna struja zasićenja  $I_S$  mnogo manja od direktne struje  $I_D$ , jednačina 5.8.1 postaje:

$$I_D = I_S e^{\frac{V_D}{nV_T}} \quad (5.8.2)$$

Pad napona na diodi  $V_D$ , kada protiče struja  $I_D$ , je na osnovu jednačine 5.8.2 je:

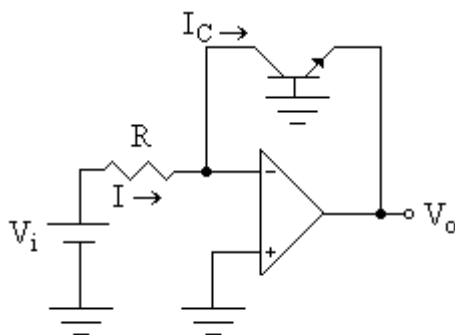
$$V_D = nV_T [\ln(I_D) - \ln(I_S)] \quad (5.8.3)$$

Struja kroz diodu  $I_D$  jednaka je struji  $I = \frac{V_i}{R}$ , a izlazni napon jednak je negativnoj vrednosti pada napona na diodi.

$$V_o = -nV_T [\ln(I_D) - \ln(I_S)] = -K_1 \ln(V_i) + K_2 \quad (5.8.4)$$

gde su:  $K_1 = nV_T$  i  $K_2 = nV_T \ln(I_S) + nV_T \ln(R)$ . Iz jednačine 5.8.4 se vidi da je napon na izlazu logaritamska funkcija napona na ulazu i zavisi od  $nV_T$  i  $I_S$ . Faktor  $n$  koji zavisi od struje diode može se eliminisati upotrebom tranzistora umesto diode.

Na slici 5.8.2 prikazana je realizacija logaritamskog pojačavača pomoću tranzistora.



Slika 5.8.2

Struja kolektora data je jednačinim:

$$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \quad (5.8.5)$$

Izlazni napon je:

$$V_o = -V_{BE} = -V_T [\ln(I_C) - \ln(I_S)] \quad (5.8.6)$$

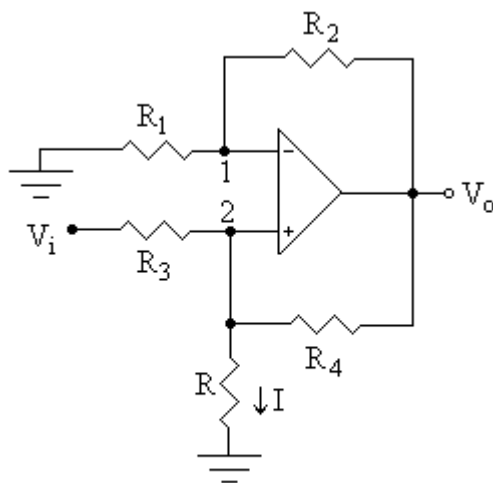
Struja kolektora  $I_C$  jednaka je struji  $I = \frac{V_i}{R}$ . Izlazni napon je:

$$V_o = -V_T \ln(V_i) + V_T [\ln(I_S) + \ln(R)] = -K_3 \ln(V_i) + K_4 \quad (5.8.7)$$

gde su:  $K_3 = V_T$  i  $K_4 = V_T [\ln(I_S) + \ln(R)]$ .

Nedostatak logaritamskih pojačavača sa slika 5.8.1 i 5.8.2 je u tome što izlazni napon zavisi od temperature ambijenta, jer su  $V_T$  i  $I_S$  temperaturno zavisni.

5.9) U kolo sa slike 5.9 odrediti struju  $I$  kroz otpornik  $R$ . Smatrati da je operacioni pojačavač idealan.



Slika 5.9

Rešenje:

Kako je upotrebljeni operacioni pojačavač idealni, napon  $V_1$  u čvoru 1 jednak je naponu  $V_2$  u čvoru 2. Sa slike 5.9 se vidi da je:

$$\frac{V_i - V_1}{R_3} = \frac{V_1}{R} + \frac{V_1 - V_o}{R_4} \quad (5.9.1)$$

$$\frac{V_o}{R_1 + R_2} = \frac{V_1}{R_1} \quad (5.9.2)$$

Eliminacijom napona  $V_o$  iz jednačina (5.9.1) i (5.9.2) dobija se:

$$V_i = \frac{V_1}{R} \left[ R_3 - R \left( \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} - 1 \right) \right] \quad (5.9.3)$$

Struja kroz otpornik  $R$  je :

$$I = \frac{V_1}{R} = \frac{V_i}{\left[ R_3 - R \left( \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} - 1 \right) \right]} \quad (5.9.4)$$



## 6. DIGITALNA ELEKTRONIKA

Digitalna elektronika zasnovana je na dejstvu diskretnih signala na logička kola. Logička kola predstavljaju elektronske sisteme koja su u stanju da ostvare određene logičke operacije u skladu sa zakonima Bulove algebre (algebra logike). Signali logičkih kola menjaju se između dva logička nivoa, odnosno stanja. Donji logički nivo označava se sa 0, a gornji logički nivo sa 1. Simboli 0 i 1 za logičke nivoe koriste se za pisanje brojeva u binarnom sistemu. Proizvoljan broj  $X$  u binarnom sistemu se može predstaviti u obliku:

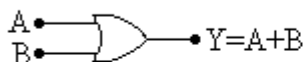
$$X = \sum_{i=-m}^{n-1} c_i 2^i$$

gde su:  $c$  – cifra binarnog brojnog sistema (0 ili 1), 2 – osnova binarnog brojnog sistema, a  $i$  – položaj cifre u nizu koji predstavlja dati broj.

Logička kola mogu biti kombinaciona i sekvencijalna. Kod kombinacionih kola stanje na izlazu logičkog kola zavisi samo od trenutne vrednosti stanja na ulazu, dok kod sekvencijalnih kola stanje na izlazu zavise ne samo od trenutnog stanja na ulazu, već i od prethodnog stanja u kome se kolo nalazilo.

OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

- operacija ILI (sabiranje, disjunkcija)



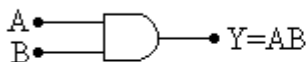
(a)

A	B	Y=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(b)

Slika 1: (a) ILI kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija I (množenje, konjunkcija)



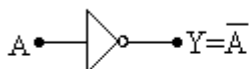
(a)

A	B	Y=AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b)

Slika 2: (a) I kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija NE



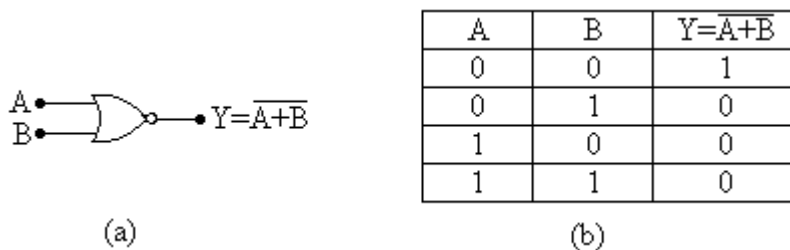
(a)

A	Y=A-bar
1	0
0	1

(b)

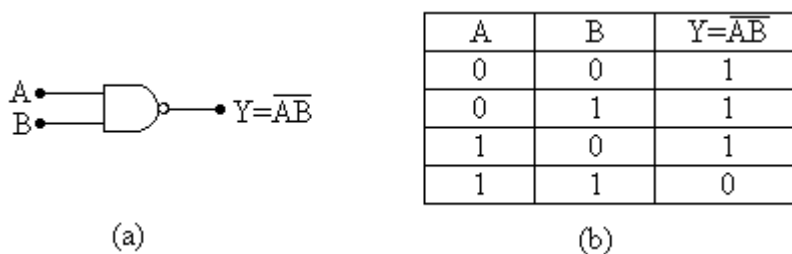
Slika 3: (a) NE kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija NILI



(a) NILI kolo, (b) funkcionalna tabela  
Slika 4: (a) NILI kolo, (b) funkcionalna tabela

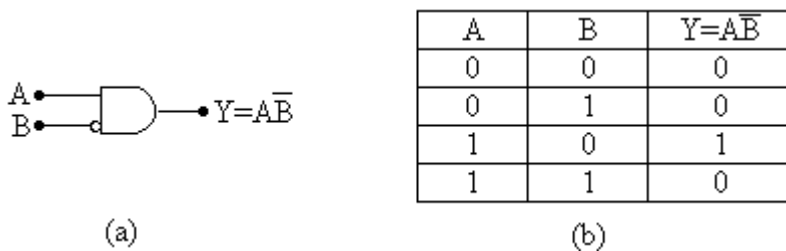
- operacija NI



(a) NI kolo, (b) funkcionalna tabela  
Slika 5: (a) NI kolo, (b) funkcionalna tabela

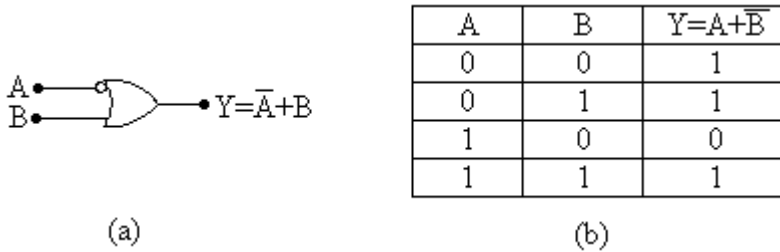
### SPECIJALNE LOGIČKE OPERACIJE

- operacije inhibicije



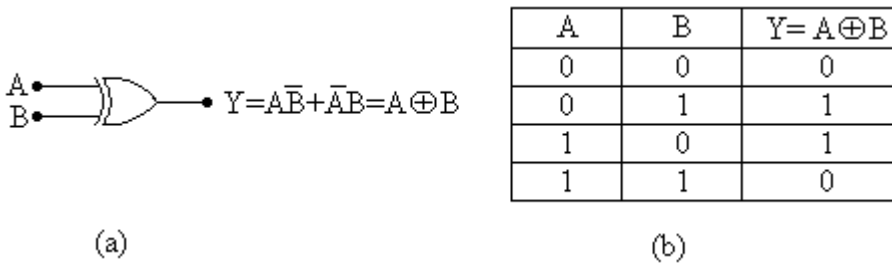
(a) inhibiciono kolo, (b) funkcionalna tabela  
Slika 6: (a) inhibiciono kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija implikacije



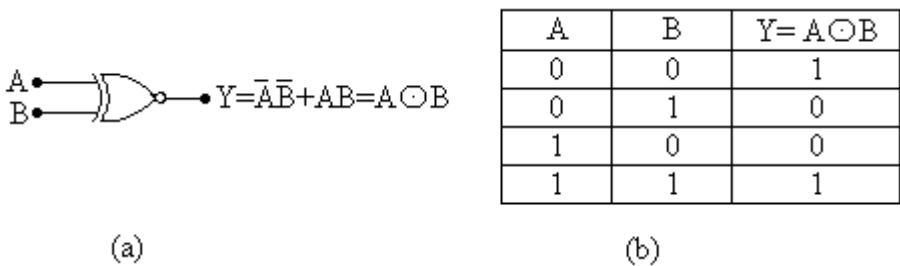
Slika 7: (a) implikaciono kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija EX-ILI



Slika 8: (a) EX-ILI kolo, (b) funkcionalna tabela

- operacija EX-NILI



Slika 9: (a) EX-NILI kolo, (b) funkcionalna tabela

## POSTULATI BULOVE ALGEBRE

Pravila za logičke operacije:

1) sa konstantnim vrednostima

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

2) sa ponovljenim vrednostima

$$A + A = A$$

$$AA = A$$

3) sa komplementarnim vrednostima

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A\bar{A} = 0$$

sa dvostruko negiranim vrednostima

$$\overline{\overline{A}} = A$$

## ZAKONI BULOVE ALGEBRE

1) zakon komutacije

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

zakon asocijacije

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

3) zakon distribucije

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

4) zakon apsorpcije

$$A + AB = A$$

$$A + \overline{A}B = A + B$$

5) De Morganovi zakoni

$$\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

6.1) Dokazati identitete:

$$(A + B)(\bar{A} + C) = \bar{A}B + AC$$

$$BC + ABD + A\bar{C} = BC + A\bar{C}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} (A + B)(\bar{A} + C) &= A\bar{A} + \bar{A}B + AC + BC = \\ &= \bar{A}B(C + \bar{C}) + AC(B + \bar{B}) + BC(A + \bar{A}) = \\ &= \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC = \\ &= \bar{A}B(C + \bar{C}) + AC(B + \bar{B}) = \bar{A}B + AC \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

$$\begin{aligned} BC + ABD + A\bar{C} &= BC + ABD(C + \bar{C}) + A\bar{C} = \\ &= BC + BCAD + A\bar{C}BD + A\bar{C} = \\ &= BC(1 + AD) + A\bar{C}(1 + BD) = BC + A\bar{C} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

6.2) Napisati funkciju  $F = AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + B\bar{D}$  u vidu zbira potpunih proizvoda.

Rešenje:

$$\begin{aligned} F &= AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + B\bar{D} = \\ &= AB(C + \bar{C})(D + \bar{D}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D + \bar{D}) + (A + \bar{A})B(C + \bar{C})\bar{D} = \\ &= ABCD + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}B\bar{C}D + \\ &+ \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = \\ &= ABCD + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + \\ &+ \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Funkcija F se može napisati i u binarnom obliku:

$$F = \Sigma(1111,1110,1101,1100,1001,1000,0110,0100) \tag{6.2.2}$$

odnosno, u decimalnom obliku:

$$F = \Sigma(4,6,8,9,12,13,14,15) \quad (6.2.3)$$

6.3) Napisati funkciju  $F = (\bar{B} + C)(\bar{A} + C + D)$  u vidu proizvoda potpunih zbirova.

Rešenje:

Funkcija F je:

$$F = (\bar{B} + C)(\bar{A} + C + D) = (A\bar{A} + \bar{B} + C + D\bar{D})(\bar{A} + B\bar{B} + C + D) \quad (6.3.1)$$

Koristeći zakon distribucije  $[A + BC = (A + B)(A + C)]$  funkcija F postaje:

$$\begin{aligned} F &= (A + \bar{B} + C + D\bar{D}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + D\bar{D}) \cdot \\ &(\bar{A} + B + C + D)(\bar{A} + \bar{B} + C + D) = \\ &= (A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot \\ &\cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + B + C + D)(\bar{A} + \bar{B} + C + D) = \\ &= (A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot \\ &\cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + B + C + D) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Funkcija F se može napisati i u binarnom obliku:

$$F = \Pi(0100,0101,1100,1101,1000) \quad (6.3.3)$$

odnosno, u decimalnom obliku:

$$F = \Pi(4,5,8,12,13) \quad (6.3.4)$$

6.4) Uprostiti funkciju od pet promenljivih:

$$F(A, B, C, D, E) = \Sigma(1,5,8,9,15,16,18,21,23,24,26,28,29,30,31)$$

koristeći Karnoove tablice.



Rešenje:

Funkcija F data je u tablici 6.4.

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	5
0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	9
0	1	1	1	1	15
1	0	0	0	0	16
1	0	0	1	0	18
1	0	1	0	1	21
1	0	1	1	1	23
1	1	0	0	0	24
1	1	0	1	0	26
1	1	1	0	0	28
1	1	1	0	1	29
1	1	1	1	0	30
1	1	1	1	1	31

Tablica 6.4

Na slici 6.4 prikazane su Karnoove tablice za četiri promenjive B, C, D, i E. Svakoj tablici dodata je vrednost za promenjivu A.

$\bar{A}$	DE	00	01	11	10
BC	00		1		
01			1		
11				1	
10	1	1			

A	DE	00	01	11	10
BC	00	1			1
01			1	1	
11	1	1	1	1	1
10	1				1

Slika 6.4

Uprošćavanje funkcije pomoću Karnoovih tablica sastoji se u tome da se za svaku zajedničku površinu ispisuju samo promenjive koje imaju iste vrednosti u svim poljima u okviru te površine. Broj polja u okviru površine može biti  $2^n$  ( $n=1,2,3\dots$ ). Za Karnoove tablice sa slike 6.4 važi:

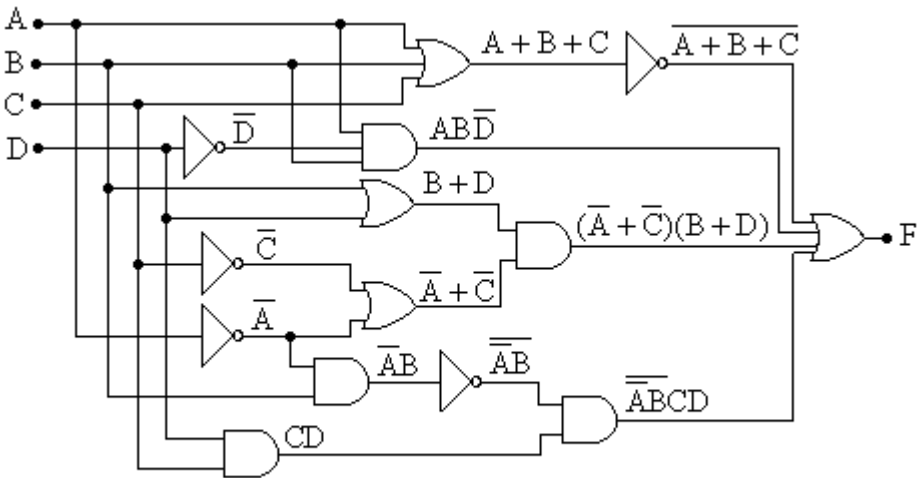
Za  $A=0$  :  $F_{\bar{A}} = \bar{B}\bar{D}E + \bar{B}C\bar{D} + BCDE$

Za  $A=1$  :  $F_A = BC + CE + \bar{C}\bar{E}$

Funkcija F posle uprošćavanja postaje:

$$F = \bar{A}F_{\bar{A}} + AF_A = \bar{A}\bar{B}\bar{D}E + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCDE + ABC + ACE + \bar{A}C\bar{E}$$

6.5) Uprostiti logičku mrežu sa slike 6.5.



Slika 6.5

Rešenje:

Sa slike 6.5 se vidi da je izlazna funkcija F:

$$F = \overline{A + B + C} + AB\overline{D} + (\overline{A} + \overline{C})(B + D) + \overline{\overline{A}BCD} = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}D + B\overline{C} + \overline{C}D + ACD + \overline{BCD} \quad (6.5.1)$$

Ako se funkcija F napiše u vidu zbira potpunih proizvoda, jednačina (6.5.1) postaje:

$$F = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} D + \overline{A} B C \overline{D} + \overline{A} B C D + A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} \overline{C} D + A B \overline{C} \overline{D} + A B \overline{C} D + A B C \overline{D} + A B C D \quad (6.5.2)$$

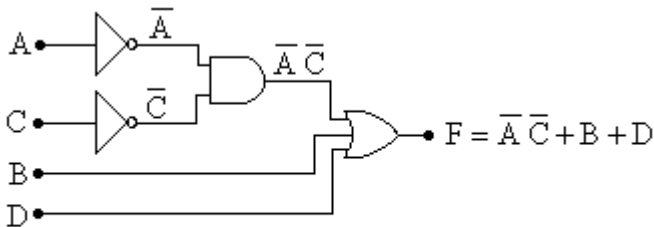
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10		1	1	

Slika 6.5.1

Minimiziranjem funkcije F pomoću Karnoove tablice sa slike 6.5.1 jednačina (6.5.2) postaje:

$$F = \overline{A} \overline{C} + B + D \quad (6.5.3)$$

Realizacija funkcije F prikazana je na slici 6.5.2.



Slika 6.5.2

6.6) Dizajnirati logičku mrežu od četiri promenjive A, B, C i D koja će na izlazu dati jedinicu ako je A = 1 i ako su jedna ili dve od preostale tri ulazne promenjive jednake jedinici.

Rešenje:

U tablici 6.6 prikazane su vrednosti koje treba da zadovoljava izlazna funkcija F.

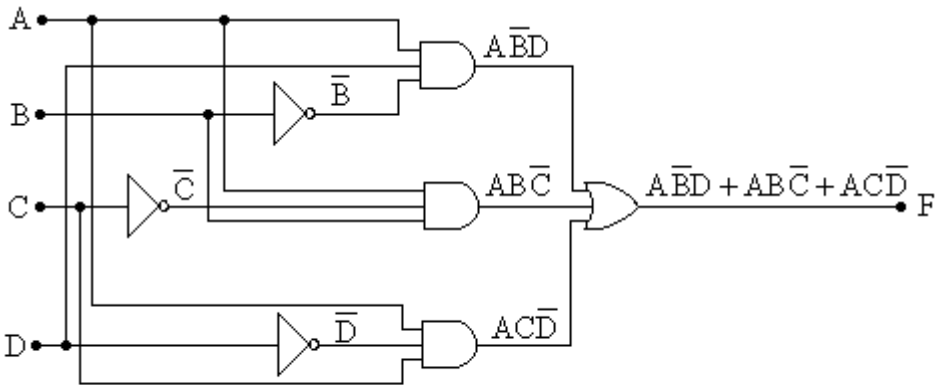
A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Tablica 6.6

Iz tablice 6.6 se vidi da je izlazna funkcija F:

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD = \\
 &= \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) + \overline{A}B\overline{C}(D + \overline{D}) + \overline{A}CD(B + \overline{B}) = \\
 &= \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}CD
 \end{aligned}
 \tag{6.6.1}$$

Realizacija funkcije data je na slici 6.6.



Slika 6.6

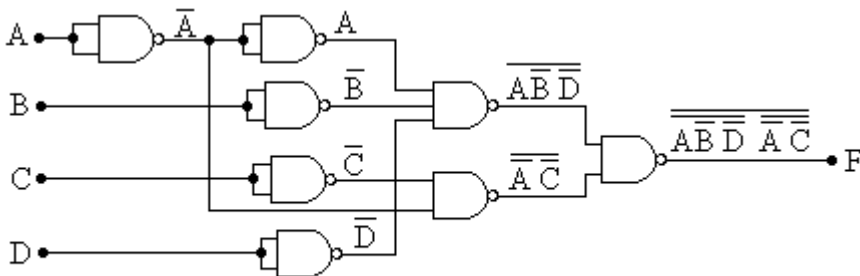
6.7) Dizajnirati logičku mrežu koja će realizovati funkciju  $F = \overline{AB\bar{D}} + \overline{A\bar{C}}$  NI kolima.

Rešenje:

Primenom De Morganovih zakona funkcija F postaje:

$$F = \overline{AB\bar{D}} + \overline{A\bar{C}} = \overline{\overline{\overline{AB\bar{D}}}} = \overline{\overline{\overline{A}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{D}}}} = \overline{\overline{\overline{A}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{D}}}} \quad (6.7.1)$$

Realizacija funkcije F NI kolima prikazana je na slici 6.7.



Slika 6.7

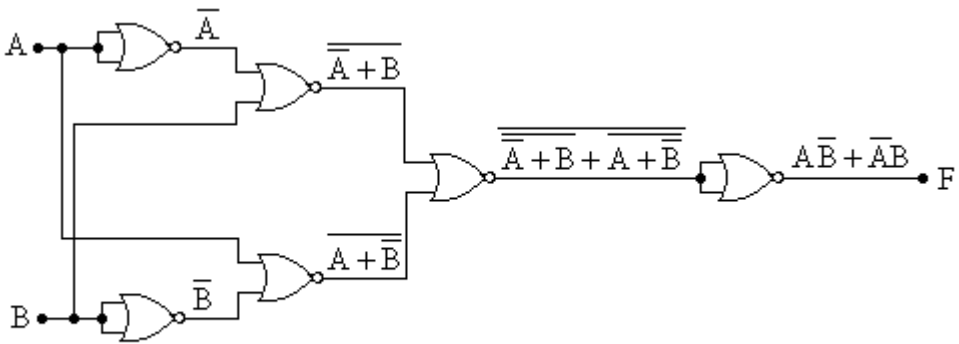
6.8) Dizajnirati logičku mrežu koja će realizovati EX - ILI kolo NILI kolima.

Rešenje:

Primenom De Morganovih zakona dobija se:

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B} = \overline{\overline{\overline{A}B + A\overline{B}}} = \overline{(\overline{\overline{A}B}) \cdot (\overline{A\overline{B}})} = \overline{\overline{\overline{A} + B} \cdot \overline{A + \overline{B}}}$$

Realizacija EX - ILI kola NILI kolima prikazana je na slici 6.8.

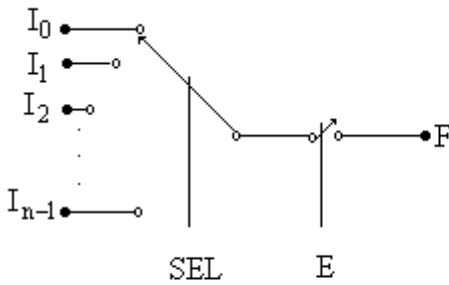


Slika 6.8

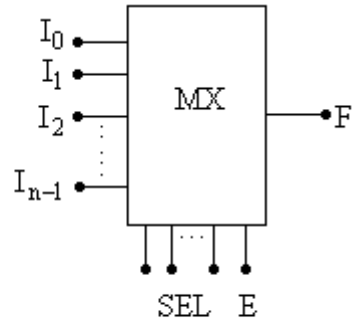
6.9) Dizajnirati multipleksor sa 8 ulaza, a zatim pomoću njega realizovati funkciju  $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,4,5,9,12,13,15)$ . Za selekzione ulaze uzeti promenjive A, B i C.

Rešenje:

Multipleksor je kombinaciona mreža koja obavlja ulogu elektronskog prekidača sa više ulaza i jednim izlazom. Na slici 6.9.1 prikazana je funkcionalna šema, a na slici 6.9.2 simbol multipleksora.



Slika 6.9.1



Slika 6.9.2

U svakom trenutku ostvaruje se veza između izlaza i samo jednog odabranog ulaza, ukoliko je aktiviran prekidač E (dozvola). Ulaz, preko kojih se dovode podaci koje treba preneti na izlaz, nazivaju se informacioni ulazi ili kanali. Selekcija kanala se vrši tako što se svakom kanalnom ulazu pridružuje određeni kodni slog kao adresa. Logička funkcija multipleksora može se napisati u obliku:

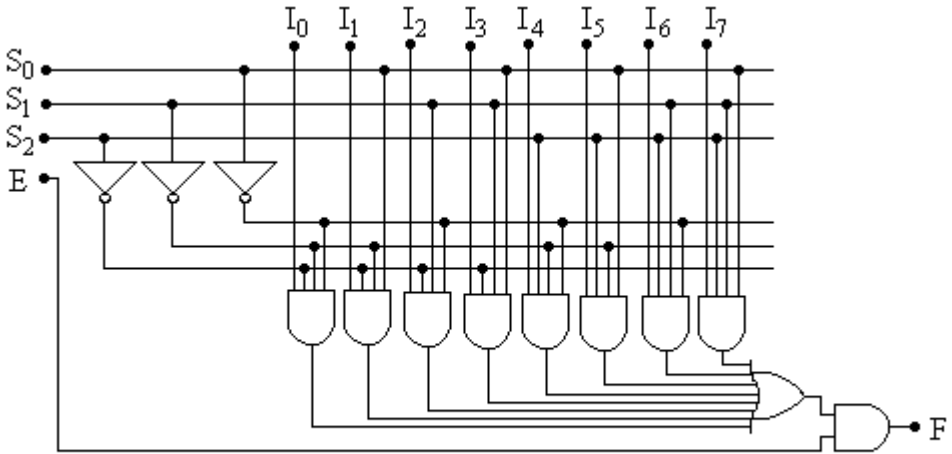
$$F = \sum_{i=0}^{n-1} I_i \cdot \text{SEL}_i \cdot E \quad (6.9.1)$$

Kao integrisane komponente multipleksori se izrađuju sa dva, četiri, osam ili šesnaest ulaza. Multipleksor sa osam ulaza ima tri selekciona ulaza  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$ . Tada je izlazni signal F dat jednačinom:

$$F = (I_0 \cdot \overline{S_2} \overline{S_1} \overline{S_0} + I_1 \cdot \overline{S_2} \overline{S_1} S_0 + \dots + I_7 \cdot S_2 S_1 S_0) \cdot E \quad (6.9.2)$$

Realizacija multipleksora sa osam ulaza prikazana je na slici 6.9.3. Funkcija F je data jednačinom:

$$F = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B C \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C D + A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C \overline{D} + A B \overline{C} \overline{D} + A B C \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C D + A B \overline{C} D + A B C D \quad (6.9.3)$$



Slika 6.9.3

Pošto su selekcionni ulazi A, B i C, jednačina (6.9.3) može se napisati u obliku:

$$F = \bar{A} \bar{B} \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \bar{B} C \cdot \bar{D} + \bar{A} B \bar{C} \cdot (D + \bar{D}) + \bar{A} B C \cdot D \bar{D} + A \bar{B} \bar{C} \cdot D + A \bar{B} C \cdot D \bar{D} + A B \bar{C} \cdot (D + \bar{D}) + A B C \cdot D \quad (6.9.4)$$

Pojedini članovi ne postoje u jednačini (6.9.3), ali su dodati u jednačinu (6.9.4) sa nultom vrednošću da bi se kompletirao skup adresnih kombinacija. Iz jednačine (6.9.4) sledi da su informacioni ulazi za trobitnu adresu ABC:

$$I_0 = \bar{D}, \quad I_1 = \bar{D},$$

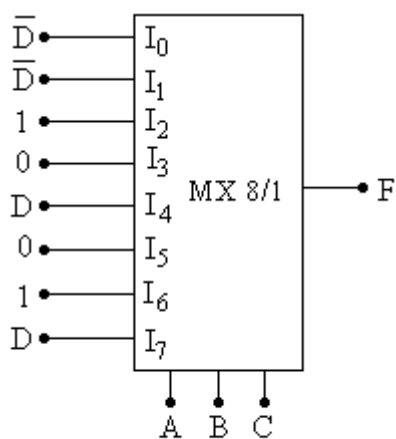
$$I_2 = D + \bar{D} = 1, \quad I_3 = D \bar{D} = 0,$$

$$I_4 = D, \quad I_5 = D \bar{D} = 0,$$

$$I_6 = D + \bar{D} = 1, \quad I_7 = D$$

Realizacija funkcije F pomoću multipleksora MX 8 / 1 prikazana je na slici 6.9.4.





Slika 6.9.4

6.10) Komisija od pet članova glasa o izboru kandidata pritiskom na taster u slučaju pozitivnog glasa. Prima se kandidat sa većim brojem glasova. Odrediti funkciju mreže koja pali kontrolnu lampu u slučaju izbora kandidata i realizovati je preko multipleksora MX 16/1.

Rešenje:

Binarne promenjive A, B, C, D i E predstavljaju glasove članova komisije, a promenjiva F određuje izbor glasanja prema tablici 6.10.1. Iz tablice 6.10.1 se vidi da je funkcija F:

$$\begin{aligned}
 F = & \bar{A} \bar{B} C D E + \bar{A} B \bar{C} D E + \bar{A} B C \bar{D} E + \bar{A} B C D \bar{E} + \bar{A} B C D E + \\
 & + A \bar{B} \bar{C} D E + A \bar{B} C \bar{D} E + A \bar{B} C D \bar{E} + A \bar{B} C D E + A B \bar{C} \bar{D} E + \\
 & + A B C \bar{D} \bar{E} + A B C D E + A B C D \bar{E} + A B C D E + A B C D E + A B C D E
 \end{aligned} \quad (6.10.1)$$

odnosno:

$$F(A, B, C, D, E) = \Sigma(7, 11, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31)$$

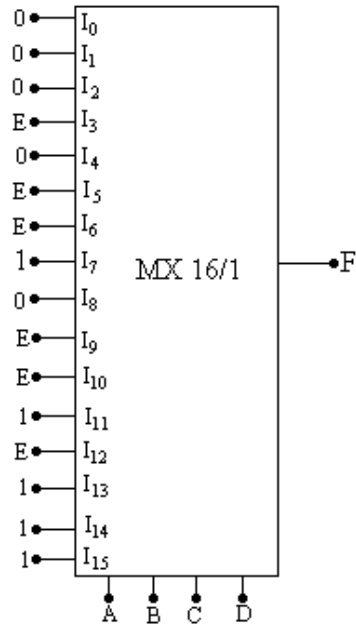
Neka su selekzione ulazne promenjive A,B,C,D. Realizacija funkcije F je data u tablici 6.10.2 i prikazana na slici 6.10.1.

A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tablica 6.10.1

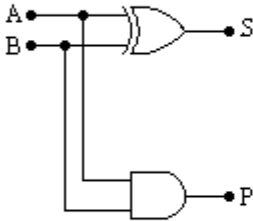
A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	E
0	1	0	0	0
0	1	0	1	E
0	1	1	0	E
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	E
1	0	1	0	E
1	0	1	1	1
1	1	0	0	E
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Tablica 6.10.2

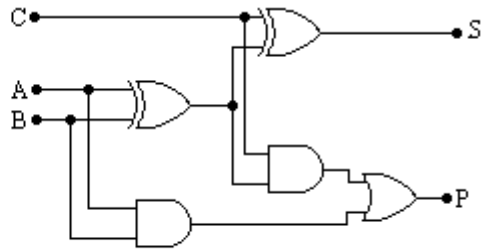


Slika 6.10.1

6.11) Objasniti funkciju kola sa slika 6.11.1 i 6.11.2.



Slika 6.11.1



Slika 6.11.2

Rešenje:

Kolo sa slike 6.11.1 predstavlja polusabirač koji se koristi da sabiranje dva bita A i B iste pozicione vrednosti. Na izlazu  $S = A \oplus B$  pojavljuje se zbir brojeva A i B, dok se na izlaz  $P = AB$  prenosi bit veće težine, ukoliko je suma sabiraka jednaka ili veća od osnove brojnog sistema.

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tablica 6.11.1. Funkcionalna tablica polusabirača

Kako polusabirač može da sabira samo bitove iste pozicione vrednosti, za sabiranje višebitnih brojeva koristi se potpuni sabirač koji je prikazan na slici 6.11.2. Na ulaze A i B dovode se bitovi iste pozicione vrednosti u datim sabircima, a na ulaz C dolazi prenos koji nastaje pri sabiranju susednog para biti niže vrednosti. Na izlaz  $S = A \oplus B \oplus C$  pojavljuje se

zbir brojeva A, B i C, dok se na izlaz  $P = (A \oplus B)C + AB$  prenosi bit veće težine.

A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tablica 6.11.2. Funkcionalna tablica potpunog sabirača

6.12) Dizajnirati potpuni sabirač NI kolima.

Rešenje:

Iz funkcionalne tablice potpunog sabirača 6.11.2 dobija se:

$$\begin{aligned}
 S &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC = \bar{C}(\bar{A}B + A\bar{B}) + C(\bar{A}\bar{B} + AB) = \\
 &= \bar{C}D + C\bar{D}
 \end{aligned} \tag{6.12.1}$$

gde su:

$$D = \bar{A}B + A\bar{B} \text{ i } \bar{D} = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Tada je:

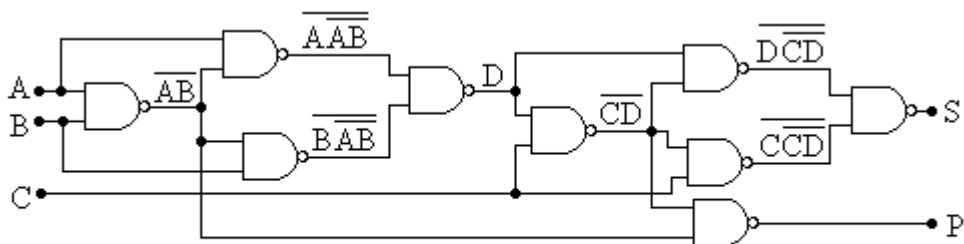
$$\begin{aligned}
 D &= \bar{A}B + A\bar{B} = \bar{A}B + A\bar{B} + A\bar{A} + B\bar{B} = A(\bar{A} + \bar{B}) + B(\bar{A} + \bar{B}) = \\
 &= \overline{A\bar{A}} + \overline{B\bar{B}} = \overline{A\bar{A} + B\bar{B}} = \overline{A\bar{A} \cdot B\bar{B}}
 \end{aligned} \tag{6.12.2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \bar{C}D + C\bar{D} = \bar{C}D + C\bar{D} + C\bar{C} + D\bar{D} = C(\bar{C} + \bar{D}) + D(\bar{C} + \bar{D}) = \\
 &= \overline{C\bar{C}} + \overline{D\bar{D}} = \overline{C\bar{C} + D\bar{D}} = \overline{C\bar{C} \cdot D\bar{D}}
 \end{aligned} \tag{6.12.3}$$

Iz funkcionalne tabele potpunog sabirača dobija se:

$$P = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = C(\overline{A}B + A\overline{B}) + AB = \overline{AB} + CD = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}} \quad (6.12.4)$$

Na slici 6.12 prikazana je realizacija potpunog sabirača NI kolima.



Slika 6.12

### 6.13) Dizajnirati koder 8 / 3 NI kolima.

Rešenje:

Postupak prevođenja decimalnog brojnog sistema u binarni brojni sistem naziva se kodiranje. Kombinatorno kolo koje vrši kodiranje naziva se koder (enkoder). Koder 8 / 3 je kolo sa 8 ulaza i 3 izlaza koji prevodi cifre od 0 do 7 decimalnog sistema u tri bita binarnog sistema.

$N_0$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$X_2$	$X_1$	$X_0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Tablica 6.13

Iz tablice istinitosti 6.13 kodera 8 / 3 se vidi da je:

$$X_0 = 1 \text{ ako je } Y_1 = 1 \text{ ili } Y_3 = 1 \text{ ili } Y_5 = 1 \text{ ili } Y_7 = 1$$

$$X_1 = 1 \text{ ako je } Y_2 = 1 \text{ ili } Y_3 = 1 \text{ ili } Y_6 = 1 \text{ ili } Y_7 = 1$$

$$X_2 = 1 \text{ ako je } Y_4 = 1 \text{ ili } Y_5 = 1 \text{ ili } Y_6 = 1 \text{ ili } Y_7 = 1$$

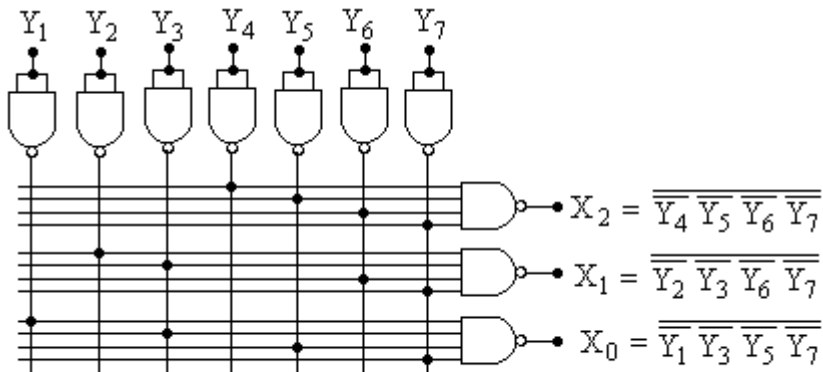
odnosno:

$$X_0 = Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7 = \overline{\overline{Y_1} \overline{Y_3} \overline{Y_5} \overline{Y_7}} \quad (6.13.1)$$

$$X_1 = Y_2 + Y_3 + Y_6 + Y_7 = \overline{\overline{Y_2} \overline{Y_3} \overline{Y_6} \overline{Y_7}} \quad (6.13.2)$$

$$X_2 = Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 = \overline{\overline{Y_4} \overline{Y_5} \overline{Y_6} \overline{Y_7}} \quad (6.13.3)$$

Realizacija kodera 8 / 3 prikazana je na slici 6.13.



Slika 6.13

#### 6.14) Dizajnirati dekodern BCD 8421 / DC .

Rešenje:

Postupak prevođenja binarnog brojnog sistema u decimalni brojni sistem naziva se dekodiranje. Kombinatorno kolo koje vrši dekodiranje

naziva se dekodler. Dekoder BCD 8421 / DC, odnosno dekodler 4 / 10, je kolo sa 4 ulaza i 10 izlaza kojim se prevode četiri bita binarnog sistema u cifre od 0 do 9 decimalnog brojnog sistema. U svakom trenutku može da se koristi signal samo sa jednog od 10 izlaza. BCD kodovi sadrže binarno kodovane decimalne cifre. Kod BCD kodova decimalni brojevi se predstavljaju binarnim tako da pojedinačno svaku cifru decimalnog broja zamenjuje određena grupa binarnih cifara. Binarne cifre u ovim grupama raspoređene su prema nekom određenom kodu koji obično ima težinski karakter. Kod BCD 8421 podudara se sa prirodnim binarnim brojevima.

Iz tablice istinitosti 6.14 dekodera 4 / 10 se vidi da je:

N <sub>0</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	Y <sub>9</sub>
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 6.14

$$Y_0 = \overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1} \overline{X_0} \quad Y_1 = \overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1} X_0$$

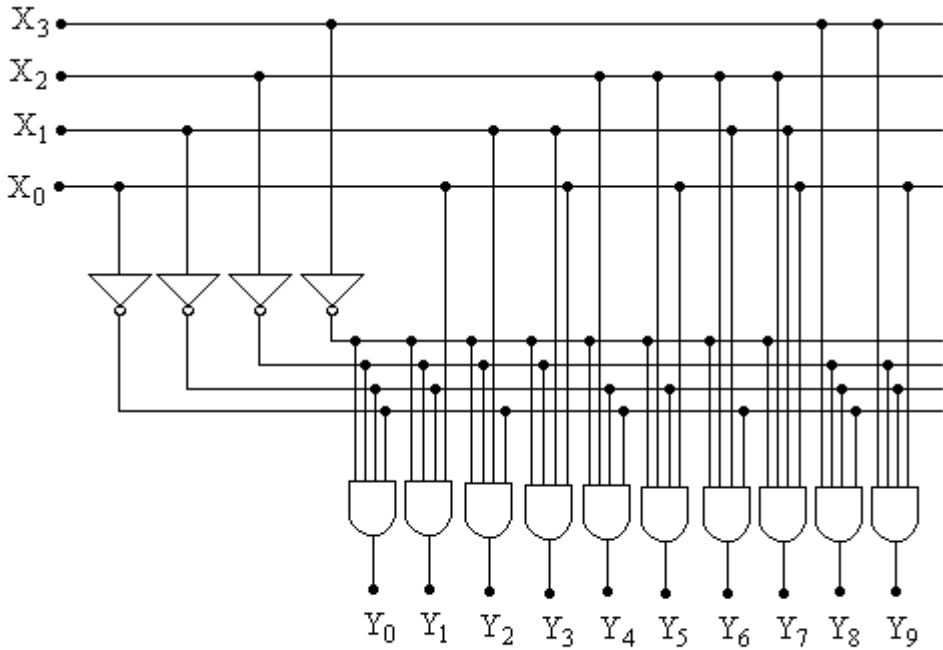
$$Y_2 = \overline{X_3} \overline{X_2} X_1 \overline{X_0} \quad Y_3 = \overline{X_3} \overline{X_2} X_1 X_0$$

$$Y_4 = \overline{X_3} X_2 \overline{X_1} \overline{X_0} \quad Y_5 = \overline{X_3} X_2 \overline{X_1} X_0$$

$$Y_6 = \overline{X_3}X_2X_1\overline{X_0} \quad Y_7 = \overline{X_3}X_2X_1X_0$$

$$Y_8 = X_3\overline{X_2}\overline{X_1}\overline{X_0} \quad Y_9 = X_3\overline{X_2}\overline{X_1}X_0$$

Realizacija dekodera BCD 8421 / DC prikazana je na slici 6.14.



Slika 6.14

6.15) Dizajnirati konvertor koda BCD 8421 u kod BCD 2421.

Rešenje:

Konvertor koda je kombinaciono kolo koje predstavlja spregu dekodera i kodera koji se koristi za konverziju jednog koda u drugi. Pri konverziji informacije iz jednog binarnog koda se dekoduju u decimalni, a zatim se



vrši kodovanje u drugi binarni kod. Podaci za proračun konverzije koda BCD 8421 u kod BCD 2421 dati su u tablici 6.15.

Dec.Br	BCD 8421				BCD 2421			
N <sub>o</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>0</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>0</sub>
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	1	1	0
9	1	0	0	1	1	1	1	1

Tablica 6.15

Iz tablice 6.15 se vidi je:

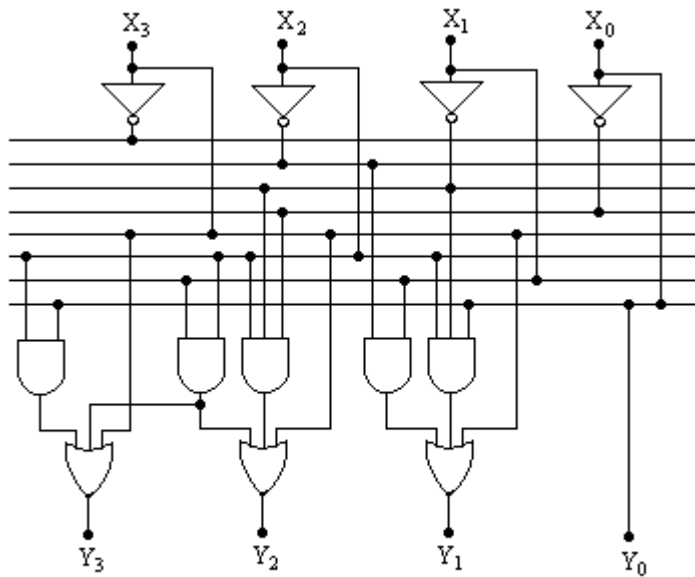
$$Y_0(X_3, X_2, X_1, X_0) = \sum(1,3,5,7,9) = X_0$$

$$Y_1(X_3, X_2, X_1, X_0) = \sum(2,3,5,8,9) = X_3 + \overline{X_2}X_1 + X_2\overline{X_1}X_0$$

$$Y_2(X_3, X_2, X_1, X_0) = \sum(4,6,7,8,9) = X_3 + X_2X_1 + X_2\overline{X_1}\overline{X_0}$$

$$Y_3(X_3, X_2, X_1, X_0) = \sum(5,6,7,8,9) = X_3 + X_2X_1 + X_2X_0$$

Kako konvertora koda BCD 8421 u kod BCD 2421 ne obuhvata binarne kombinacije od 10 do 15, one su iskorišćene za minimizaciju izlaznih funkcija konvertora koda. Realizacija konvertor koda BCD 8421 u kod BCD 2421 data je na slici 6.15

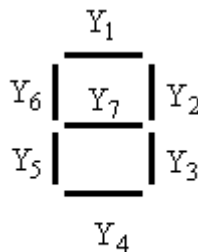


Slika 6.15

6.16) Realizovati konvertor koda BCD u kod 7 segmenta. Za realizaciju konvertora koristiti dekoder 4 / 10.

Rešenje:

Kod 7 segmenta koristi se za aktiviranje indikatora prikazanog na slici 6.16.1 koji se koristi za ispisivanje simbola cifara dekadnog sistema.



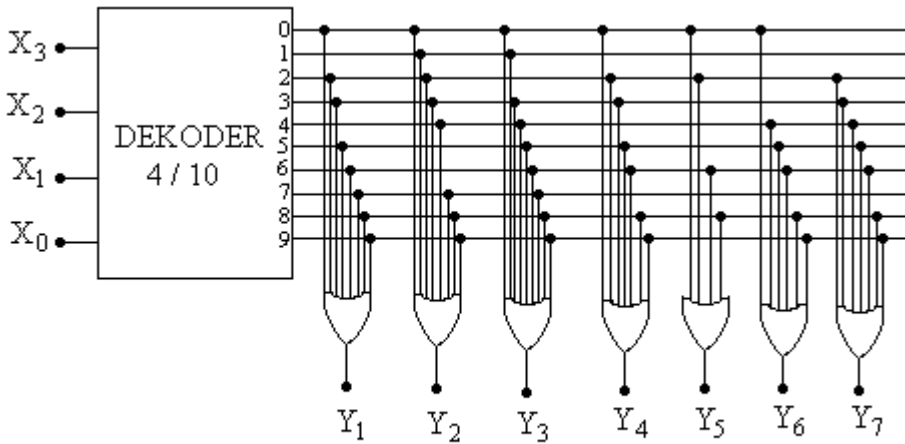
Slika 6.16.1

Formiranje pojedinih simbola ostvaruje se paljenjem odgovarajućih svetlosnih segmenata prema tablici 6.16.

$N_0$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X_0$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

Tablica 6.16

Realizacija konvertora koda BCD u kod 7 segmenata prikazana je na slici 6.16.2.



Slika 6.16.2

6.17) Dizajnirati mrežu za generisanje bita parnosti za signal od 4 bita.

Rešenje:

Kod kodovanja podataka često se javlja potreba za kontrolom ispravnosti kodovanja. To je najlakše izvesti kontrolom parnosti jedinice u kodnim slogovima. U tablici 6.17 date su vrednosti koje zadovoljava bit parnosti.

$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X_0$	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Tablica 6.17

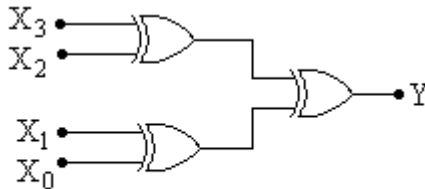
Iz tablice 6.17 sledi da jednačina bita parnosti za signal od četiri bita:

$$\begin{aligned}
 Y = & \overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1} X_0 + \overline{X_3} \overline{X_2} X_1 \overline{X_0} + \overline{X_3} X_2 \overline{X_1} \overline{X_0} + \overline{X_3} X_2 X_1 X_0 + \\
 & + X_3 \overline{X_2} \overline{X_1} \overline{X_0} + X_3 \overline{X_2} X_1 X_0 + X_3 X_2 \overline{X_1} \overline{X_0} + X_3 X_2 X_1 \overline{X_0}
 \end{aligned}
 \tag{6.17.1}$$

Posle sređivanja jednačina (6.17.1) postaje:

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{X_3} \overline{X_2} (\overline{X_1 X_0} + X_1 \overline{X_0}) + \overline{X_3} X_2 (\overline{X_1 X_0} + X_1 \overline{X_0}) + \\
 &+ X_3 \overline{X_2} (\overline{X_1 X_0} + X_1 \overline{X_0}) + X_3 X_2 (\overline{X_1 X_0} + X_1 \overline{X_0}) = \\
 &= (\overline{X_3} \overline{X_2} + X_3 X_2) (X_1 \oplus X_0) + (\overline{X_3} X_2 + X_3 \overline{X_2}) (\overline{X_1 \oplus X_0}) = \quad (6.17.1) \\
 &= (\overline{X_3} \oplus X_2) (X_1 \oplus X_0) + (X_3 \oplus X_2) (\overline{X_1 \oplus X_0}) = \\
 &= (X_3 \oplus X_2) \oplus (X_1 \oplus X_0)
 \end{aligned}$$

Realizacija mreže za generisanje bita parnosti za signal od 4 bita prikazana je na slici 6.17.



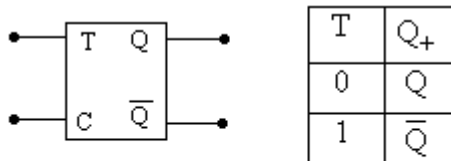
Slika 6.17

6.18) Dizajnirati trobitni brojač koristeći T flip flopove koji:

- a) broji unapred
- b) broji unazad

Rešenje:

Na slici 6.18.1 prikazan simbol T flip flopa i njegova tablica istinitosti.



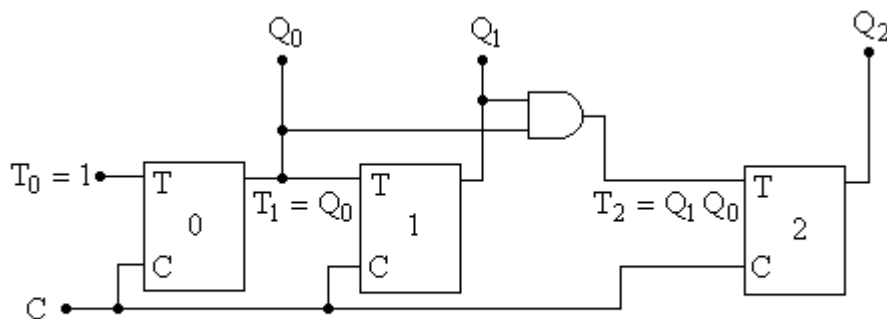
Slika 6.18.1

a) U tablici 6.18.1 opisan je trobitni brojač koji broji unapred. Iz tablice 6.18.1 se vidi da se  $Q_0$  menja na svaki impuls, što je moguće samo pri  $T_0 = 1$ .  $Q_1$  menja stanje samo ako je  $Q_0 = 1$ , odnosno tada je  $T_1 = Q_0$ .  $Q_2$  menja stanje samo ako je  $Q_0 = Q_1 = 1$ , odnosno tada je  $T_2 = Q_0Q_1$ .

stanje	zatečeno stanje			sledeće stanje		
	$N_0$	$Q_2$	$Q_1$	$Q_0$	$Q_2$	$Q_1$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	0
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1
...	...	...	...	...	...	...

Tablica 6.18.1

Realizacija trobitnog brojača koji broji unapred prikazana je na slici 6.18.2.



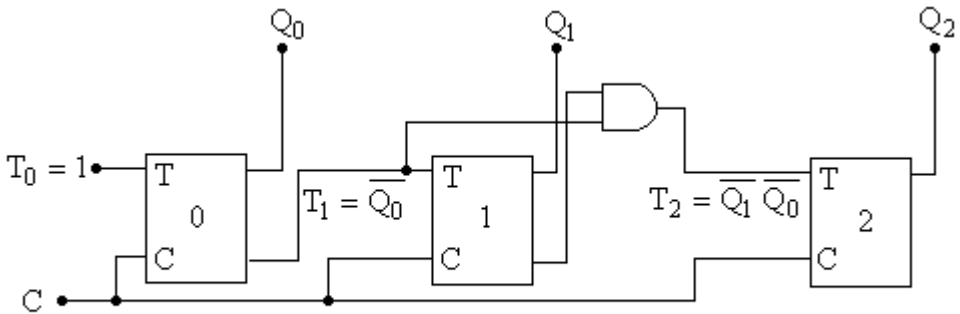
Slika 6.18.2

b) U tablici 6.18.2 opisan je trobitni brojač koji broji unazad.

stanje	zatečeno stanje			sledeće stanje		
	$N_0$	$Q_2$	$Q_1$	$Q_0$	$Q_2$	$Q_1$
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0
2	2	1	1	0	1	0
3	3	1	0	1	1	0
4	4	1	0	0	1	1
5	5	0	1	1	0	1
6	6	0	1	0	0	1
7	7	0	0	1	0	0
8	8	0	0	0	1	1
...	...	...	...	...	...	...

Tablica 6.18.2

Iz tablice 6.18.2 se vidi da se  $Q_0$  menja na svaki impuls, što je moguće samo pri  $T_0 = 1$ .  $Q_1$  menja stanje samo ako je  $Q_0 = 0$ , odnosno tada je  $T_1 = \overline{Q_0}$ .  $Q_2$  menja stanje samo ako je  $Q_0 = Q_1 = 0$ , odnosno tada je  $T_2 = \overline{Q_0} \overline{Q_1}$ . Realizacija trobitnog brojača koji broji unazad prikazana je na slici 6.18.3.

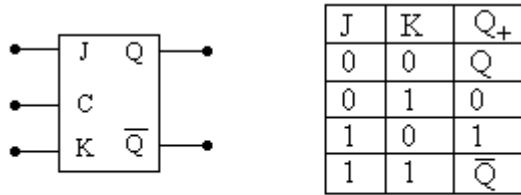


Slika 6.18.3

6.19) Dizajnirati paralelni brojač koristeći JK flip flopove sa sledećim redosledom stanja: 110, 001, 010, 000, 111, 101, 110.

Rešenje:

Na slici 6.19.1 prikazan simbol JK flip flopa i njegova tablica istinitosti.



Slika 6.19.1

Na osnovu tablice istinitosti JK flip flopa, u tablici 6.19 dati su uslovi prelaska.

stanje	zatečeno stanje			sledeće stanje			uslovi prelaska		
	Q <sub>2</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>0</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>0</sub>	J <sub>2</sub> K <sub>2</sub>	J <sub>1</sub> K <sub>1</sub>	J <sub>0</sub> K <sub>0</sub>
N <sub>0</sub>	1	1	0	0	0	1	11	11	11
1	1	1	0	0	0	1	11	11	11
2	0	0	1	0	1	0	00	11	11
3	0	1	0	0	0	0	00	11	00
4	0	0	0	1	1	1	11	11	11
5	1	1	1	1	0	1	00	11	00
6	1	0	1	1	1	0	00	11	11
7	1	1	0	0	0	1	11	11	11
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tablica 6.19



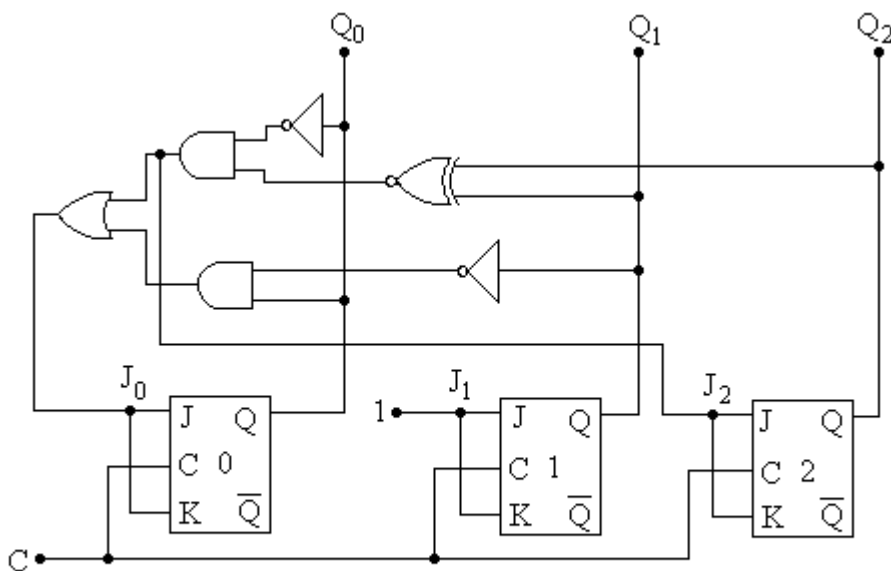
Iz tablice 6.19 vidi se da je:

$$J_0 = K_0, J_1 = K_1 = 1, J_2 = K_2$$

$$J_0 = \overline{Q_2} \overline{Q_1} Q_0 + Q_2 Q_1 \overline{Q_0} + \overline{Q_2} \overline{Q_1} \overline{Q_0} + Q_2 \overline{Q_1} Q_0 = \overline{Q_1} Q_0 + (Q_2 \oplus Q_1) \overline{Q_0}$$

$$J_2 = \overline{Q_2} \overline{Q_1} \overline{Q_0} + Q_2 Q_1 \overline{Q_0} = (Q_2 \oplus Q_1) \overline{Q_0}$$

Realizacija brojača prikazana je na slici 6.19.2.



Slika 6.19.2

## 7. LITERATURA

1. B. Ćirilov: UVOD U ANALIZU ELEKTRONSKIH KOLA, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
2. B. Ćirilov: ZBIRKA ZADATAKA UVOD U ANALIZU ELEKTRONSKIH KOLA, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
3. B. Ćirilov: ELEKTRONIKA – EKSPERIMENTALNE VEŽBE, PMF Beograd, 1981.
4. M. Milić: ZADACI IZ TEORIJE ELEKTRIČNIH KOLA, Naučna knjiga, Beograd 1983.
5. A. Cohen: LINEAR CIRCUITS AND SYSTEMS, Regents Publishing Company, New York, 1965.
6. P. Horowitz, W. Hill: THE ART OF ELECTRONICS, Cambridge University Press, New York, 1989.
7. T. C. Hayes, P. Horowitz, STUDENT MANUEL FOR THE ART OF ELECTRONICS, Cambridge University Press, New York, 1989.
8. J. Ryder, C. Thompson: ELETRONIC CIRCUITS AND SYSTEMS, Prentice – Hall, New Jersey, 1976.

## LITERATURA

---

9. M. Hribšek, D. Vasiljević, B. Drakulić: ELEKTRONIKA I – PROBLEMI I REŠENJA, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
10. S. Tešić: ELEKTRONIKA – IMPULSNA I DIGITALNA, Nauka, Beograd 1992.
11. S. Tešić, D. Vasiljević: ZBIRKA ZADATAKA IZ DIGITALNE ELEKTRONIKE, Naučna knjiga, Beograd, 1992.